Relatório de Iniciação Científica

Probabilidade Geométrica e a Geometria Integral no Plano Euclidiano

Universidade Federal do ABC

Sumário

Resumo

"Em 1961, ano em que se constituiu a Sociedade Internacional de Estereologia, deu-se a seguinte definição: A Estereologia é um conjunto de métodos para exploração do espaço tridimensional a partir do conhecimento de seções bidimensionais e projeções sobre planos. Ou seja, trata-se da exploração do espaço a partir do plano." (cf. [1], p.1).

O início do desenvolvimento da estereologia e áreas da matemática associadas e ela deu-se com o desenvolvimento da probabilidade geométrica e da geometria integral. Ambas as áreas são produtos da solução do problema da agulha de Buffon. "Georges-Louis Leclerc, Conde de Buffon (1707–1788), é famoso pela seguinte "experiência": Suponhamos que estamos numa sala cujo chão é constituído por tábuas paralelas. Designemos a distância entre as tábuas por a. Tomemos uma agulha, ou um objeto semelhante, de comprimento $2.r$ menor do que a. Esta condição assegura que, se deixarmos cair a agulha no chão, ela atravessará quando muito uma linha que divide tábuas diferentes. A probabilidade de que esse acontecimento ocorra (isto é, que a agulha, ao cair no chão, não fique totalmente contida no interior de uma única tábua) é então $P = \frac{4.r}{\pi.a}$. Esta fórmula contém a constante π – proporcionando-nos, portanto, a possibilidade de calcular esta constante por via "experimental". [...]"(cf. [2], p.124-125).

Para podermos estudar as bases da teoria estereológica dividimos o projeto em três partes de estudo: os conjuntos de faixas no plano, o grupo de movimentos no plano e a densidade cinemática desses movimentos.

Palavras Chaves: densidade, conjuntos convexos, estereologia, geometria integral

1 Introdução

"A Estereologia é geralmente considerada como a metodologia destinada à estimação de parâmetros geométricos de estruturas espaciais, a partir da informação proporcionada mediante uma amostra geométrica adequada. Trata-se, portanto, de uma ciência que combina resultados teóricos de Geometria Integral, Probabilidade Geométrica e Estatística. Os resultados obtidos em Estereologia, até aqueles mais teóricos, inspiram-se em problemas levantados em outras ciências, problemas como a estimação da proporção da quantidade de material em uma rocha, o número de neurônios em uma região cerebral ou o comprimento dos dendritos neurais. Uma vez formulado o problema na linguagem matemática adequada, trata-se de uma submersão do problema na Geometria Integral para obter-se a fórmula apropriada que nos leve ao parâmetro de interesse"(cf. [1], p.2).

Probabilidade, geometria, medida e grupos formam as bases da Geometria Integral, cujos primeiros resultados foram obtidos aos anos de 1935-1939 por W. Blaschke e seu grupo de estudos na Universidade de Hamburgo. Outra área de grande importância para a matemática é a probabilidade geométrica, seu desenvolvimentoo histórico pode ser visto da seguinte maneira: "[...] o problema da agulha de Buffon tem uma extraordinária importância histórica: foi o primeiro problema de um novo território, a Teoria da Probabilidade Geométrica, e nesse sentido rasgou horizontes para novas ideias matemáticas, que ainda hoje frutificam."(cf. [2], p.131).

Um dos grandes dilemas histórico sobre a Teoria da Probabilidade Geométrica consiste no paradigma: "*Terá Buffon realmente lançado agulhas?*". "Em notável contraste com o registo histórico, existe na comunidade matemática uma impressão generalizada de que Buffon teria não apenas considerado a possibilidade de determinar uma aproximação ao valor de π por meio de uma "experiência" como, de fato, a teria mesmo chegado a realizar. [...] Muitos outros livros de História da Probabilidade são omissos sobre a ligação de Buffon à aproximação experimental de π, deixando a questão totalmente em aberto."(cf. [2], p.129).

Atualmente, resolver este e outros problema utilizando ferramentas da Geometria Integral, por exemplo, é o cerne de uma pesquisa basica e é sobre isso este relatório.

2.1 Objetivos Gerais

- Desenvolver uma rotina de estudo individual.
- Aprimorar o raciocínio lógico-matemático.
- Aprender a isolar um problema em sua essência matemática para então poder associar problemas vindos de diferentes áreas e encontrar soluções mais simples e mais gerais para os mesmos.
- Familiarizar-se com a pesquisa em Matemática, aprender a questionar e buscar soluções novas e/ou já existentes de problemas.
- Estimular o rigor matemático como uma forma natural de formular e pensar sobre problemas matemáticos.

2.2 Objetivos Específicos

- Aprender importantes conceitos e propriedades da área da matemática chamada Geometria Integral.
- Aplicar resultados obtidos nesta área a outras áreas da Matemática. Este projeto utilizou fortemente conceitos das área de formas diferenciais e geometria plana.
- Aprender importantes resultados da matemática, como o Teorema da agulha de Buffon, fórmulas integrais para densidade cinemática.

3 Métodos

A metodologia de trabalho nesta IC deu-se por meio de apresentações semanais de alguns capítulos do livro [3], considerado uma grande referência da área.

Além disso, foram resolvidos diversos exercícios a respeito dos temas estudados.

4 Resultados

4.1 Conjuntos de faixas no plano

No que segue desta seção,vamos fazer algumas definições e provar algumas proposições que serão necessárias para a resolução do problema da agulha de Buffon, que será exibida na conclusão deste relatório.

Definição 4.1 *Uma faixa B de largura a no plano consiste em uma parte fechada do plano entre duas retas paralelas cuja distância entre uma e outra é a.*

Definição 4.2 *A posição de uma faixa B será determinada pela posição da reta que equidista das retas paralelas da fronteira da faixa.*

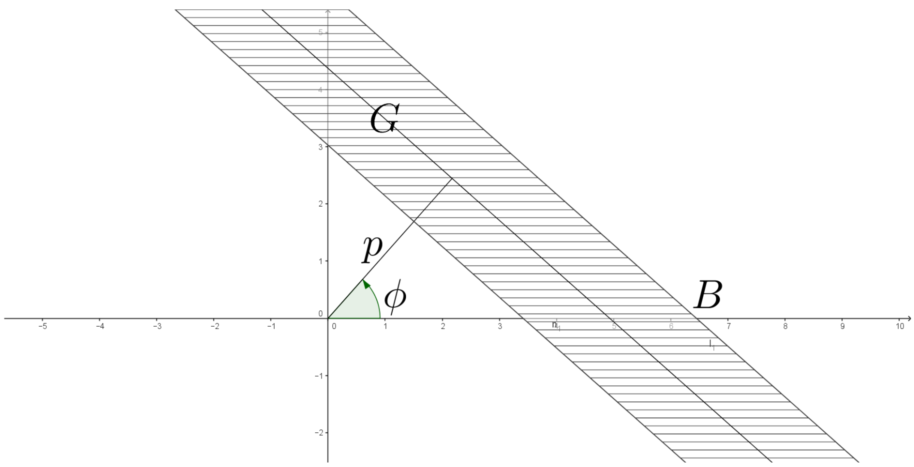


Figura 4.1: Posição de uma Faixa

Definição 4.3 *A densidade de um conjunto de faixas $B(p,\phi)$ no plano é:*

$$dB = dp \wedge d\phi,$$

onde p e ϕ denotam as coordenadas da reta central G da faixa B.

Proposição 4.4 *A medida de um conjunto de faixas B no plano sobre um conjunto convexo fechado K que intercepa B é*

$$m(B; B \cap K \neq \emptyset) = \int_{B \cap K \neq \emptyset} dB = L + \pi.a,$$

onde L é o perímetro de K e a a largura de B.

Demonstração: Denotamos por G a reta central de B, assim:

$$\int_{B \cap K \neq \emptyset} dB = \int_{G \cap K_{a/2} \neq \emptyset} dp \wedge d\phi = L + 2.\pi.\frac{a}{2} = L + \pi.a$$

$\square$

Proposição 4.5 *Tome K_1 um conjunto convexo contido em um outro conjunto convexo K fechado. A probabilidade que uma faixa B de largura a intersecte K_1, dado que ela intersecta K, é de:*

$$p = \frac{L_1 + \pi.a}{L + \pi.a}$$

Demonstração: Por definição de probabilidade:

$$p = \frac{m(B; K_1 \cap B \neq \emptyset)}{m(B; K \cap B \neq \emptyset)} = \frac{L_1 + \pi.a}{L + \pi.a}$$

$\square$

4.2 O grupo de movimentos no plano: densidade cinemática

Para esta seção vamos fazer algumas definições e provar algumas proposições que serão necessárias para a resolução de um problema que será proposto na conclusão deste relatório.

Definição 4.6 *Assuma o plano euclidiano referenciado por um sistema retangular de coordenadas cartesianas. Definimos um movimento como a transformação:*

$$u : P(x, y) \to P'(x', y')$$

Que será representado pelas equações:

$$u \begin{cases} x' = x.cos(\phi) - y.sin(\phi) + a \\ y' = x.sin(\phi) + y.cos(\phi) + b \end{cases}$$

onde a, b, ϕ *são parâmetros, de modo que* $-\infty < a, b < \infty$ *e* $0 \leq \phi \leq 2.\pi$.

Definição 4.7 *Dizemos que K e K′ são congruentes, se K′ é a imagem K sobre um movimento u, ou seja,* $K' = u \cdot K$

Lema 4.8 *Podemos induzir uma interpretação geométrica para os parâmetros* a, b, ϕ. *Suponha* $(O; x, y)$ *um sistema de coordenadas cartesianas com origem O e eixos x e y. Dado um movimento u, se o sistema de coordenadas C for mapeado em um sistema* $(O'; x', y')$, *então os parâmetros a e b representam a translação em x e y, respecivamente, da origem O para O′ e o parâmetro* ϕ *representa uma rotação anti-horária do eixo x′ em relação ao eixo x.*

Demonstração: Suponha que tenhamos transladado por (a, b) e rotacionado por ϕ o sistema $(O'; x', y')$ com relação ao sistema $(O; x, y)$. Seja um ponto P de coordenadas (A, B) no sistema de coordenadas $(O'; x', y')$.

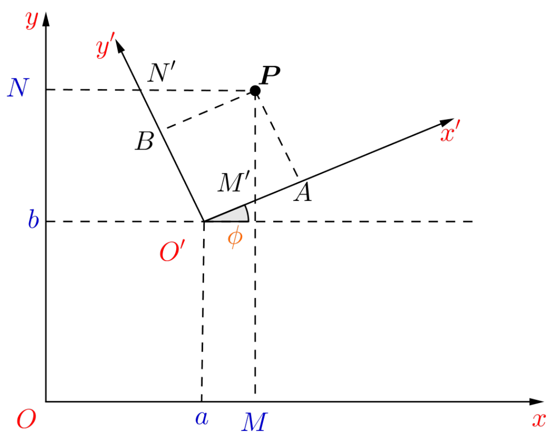


Figura 4.2: Sistema de Coordenadas Transladado

Queremos obter as coordenadas desse ponto no sistema original $(O; x, y)$ e assim mostrar que as equações da Definição 4.6 valem. Assim, temos que:

$$\overline{O'M'}.cos(\phi) + a = M$$

$$\left(\overline{O'A} - \overline{M'A}\right).cos(\phi) + a = M$$

$$A.cos(\phi) - B.tan(\phi).cos(\phi) + a = M$$

$$M = A.cos(\phi) - B.sin(\phi) + a$$

Além disso, temos também:

$$\overline{O'N'}.cos(\phi) + b = N$$

$$\left(\overline{O'B} - \overline{BN'}\right).cos(\phi) + b = N$$

$$B.cos(\phi) + A.tan(\phi).cos(\phi) + b = N$$

$$N = B.cos(\phi) + A.sin(\phi) + b$$

Portanto, obtemos o seguinte sistema de equações para as coordenadas do ponto P:

$$\begin{cases} M = A.cos(\phi) - B.sin(\phi) + a \\ N = B.cos(\phi) + A.sin(\phi) + b \end{cases}$$

O que prova a interpretação geométrica para os parâmetros a, b, ϕ. $\square$

No que segue, encontraremos as $1 - formas$ ω_1, ω_2 e ω_3, que são invariantes a aplicação L_s^* induzida por L_s. Analogamente, encontraremos as $1 - formas$ invariantes a aplicação R_s^*.

Observações 4.9 *É usual representarmos o movimento u definido em 4.6 pela seguinte matriz:*

$$u = \begin{pmatrix} cos(\phi) & -sin(\phi) & a \\ sin(\phi) & cos(\phi) & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Além disso, é facil verificar que para fazermos uma composição de movimentos basta multiplicarmos as respectivas matrizes e para o movimento inverso basta invertemos a respectiva matriz.

Definição 4.10 *Defina o grupo de movimentos $\mathfrak{M}$, como um grupo de matrizes da forma mostrada na Observação 4.9, com o produto de matrizes como a operação do grupo.*

Definição 4.11 *Seja um movimento s tal que $s \in \mathfrak{M}$ e $s := (a_0, b_0, \phi_0)$. Cada movimento s define dois endomorfimos em $\mathfrak{M}$. A* ***transformação a esquerda*** *$L_s : u \to s \cdot u$, que pode* *ser escrita da seguinte maneira*

$$L_s \begin{cases} a & \rightarrow a.cos(\phi_0) - b.sin(\phi_0) + a_0 \\ b & \rightarrow a.sin(\phi_0) + b.cos(\phi_0) + b_0 \\ \phi & \rightarrow \phi + \phi_0 \end{cases}$$

De maneira análoga temos a ***transformação a direita*** $R_s : u \rightarrow u \cdot s$, *que pode ser escrita da seguinte maneira*

$$R_s \begin{cases} a & \rightarrow a_0.cos(\phi) - b.sin(\phi) + a \\ b & \rightarrow a_0.sin(\phi) + b.cos(\phi) + b \\ \phi & \rightarrow \phi_0 + \phi \end{cases}$$

As formas explicitas para L_s e R_s apresentadas na Definição 4.11 serão demonstradas no Apêndice deste relatório.

Definição 4.12 *Defina as* $1-formas$ *em* $\mathfrak{M}$ *como qualquer expressão da seguinte tipo*

$$\omega(u) = \alpha(u).da + \beta(u).db + \gamma(u).d\phi,$$

onde $\alpha(u)$, $\beta(u)$ *e* $\gamma(u)$ *são funções de classe* $\mathfrak{C}^\infty$ *definidas no espaço* $\mathfrak{M}$.

Observações 4.13 *É facil ver que o cunjunto* $\mathfrak{U}$ *de todas as* $1-formas$ *de* $\mathfrak{M}$ *em um ponto* u, *que juntamente com a adição e o produto por escalar definidos de maneira natural constituem um espaço vetorial de dimenção três* $(\mathfrak{U}, +, \cdot)$. *O qual chamaremos de espaço cotangente de* $\mathfrak{M}$ *no ponto* u *e denotaremos por* T_u^*. *Note que as* $1-formas$ da, db *e* $d\phi$ *constituem uma base para* T_u^*.

Observações 4.14 *Note que as transformações a esquerda* L_s *e a direita* R_s *induzem em* T_u^* *as aplicações* $L_s^* : \omega(u) \rightarrow \omega(s \cdot u)$ *e* $R_s^* : \omega(u) \rightarrow \omega(u \cdot s)$. *Assim, temos que as seguintes* $1-formas$ *serão invariantes a* L_s^* *e* R_s^*

$$L_s^* \begin{cases} \omega_1 = cos(\phi).da + sin(\phi).db \\ \omega_2 = -sin(\phi).da + cos(\phi.db \\ \omega_3 = d\phi \end{cases} \qquad R_s^* \begin{cases} \omega^1 = b.d\phi + da \\ \omega^2 = -a.d\phi + db \\ \omega^3 = d\phi \end{cases}$$

As expressões obtidas para ω_1, ω_2 e ω_3, assim como para ω^1, ω^2 e ω^3, na observação 4.14, serão demonstradas no Apêndice deste relatório.

Definição 4.15 *Sejam* $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, $1-formas$ *invariantes a esquerda, então o produto exterior*

$$dK = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

é uma $3-forma$ *invariente a esquerda.*

Observações 4.16 *Note que,* $dK = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = da \wedge db \wedge d\phi$. *Além disso, a menos de uma constante,* dK *é a unica* $3-forma$ *invariante a esqueda em* $\mathfrak{M}$.

Observações 4.17 *Analogamente, podemos definir uma* $3-forma$ *invariante a direita, tal que,* $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = da \wedge db \wedge d\phi = dK$. *Além disso, oberva-se também que, a menos de uma constante, essa é a unica* $3-forma$ *invariante a direita em* $\mathfrak{M}$.

As expressões obtidas para dK nas observações 4.16 e 4.17 são obtidas através do produto exterior diretamente.

Observações 4.18 *Podemos observar que diferenciando-se a identidade* $u.u^{-1} = e$, *onde* $u \in \mathfrak{M}$ *e* $e \in \mathfrak{M}$ *é a matriz identidade, obtemos que* $dK(u^{-1}) = -dK(u)$. *Daí segue que a* $3-forma$ *definida em 4.15 é invariante sobre transformações à esquerda e direita e sobre inverção de movimento. Assim, a chamamos de* ***densidade cinemática*** *para um grupo de movimentos no plano. A densidade cinemática* dK *é um elemento de volume invariante no espaço dos grupos de movimentos* $\mathfrak{M}$.

Definição 4.19 *Definimos que a integral sobre* dK *sobre um domínio em* $\mathfrak{M}$ *é a medida desse conjunto de movimento (****medida cinemática****).*

Exemplo 4.20 Considere um retângulo $K = 0ABC$ e um dominio fixado K_0, como mostrado na figura a seguir. Podemos nos perguntar sobre a medida do conjunto de movimentos u tais que $u.K \cap K_0 \neq \emptyset$. Essa medida é a integral de $dK = da \wedge db \wedge d\phi$ sobre os pontos $0'(a,b)$ e os ângulos ϕ tais que $u.K \cap K_0 \neq \emptyset$. Como dK é invariante a translações a direita e a esquerda e inverções de movimento, não precisamos nos preocupar com os outros casos pois todos são equivalentes. A título de exemplificação, se K reduzir-se a um ponto $P_0(0,0)$ e colocarmos $u.P_0 = P(a,b)$, nós temos:

$$m(u; uP_0 \in K_0) = \int_{uP_0 \in K_0} da \wedge db \wedge d\phi = 2.\pi \int_{uP_0 \in K_0} da \wedge db = 2.\pi.F_0, \qquad (4.1)$$

onde F_0 é a área de K_0. A equação 4.1 é uma simples, porém útil, fórmula integral.

Observações 4.21 *Podemos obter uma outra expressão para a densidade cinemática. Tome* $(P; x', y')$ *um referencial móvel definido pelo ponto* $P(a,b)$ *e pelo ângulo* ϕ *que a*

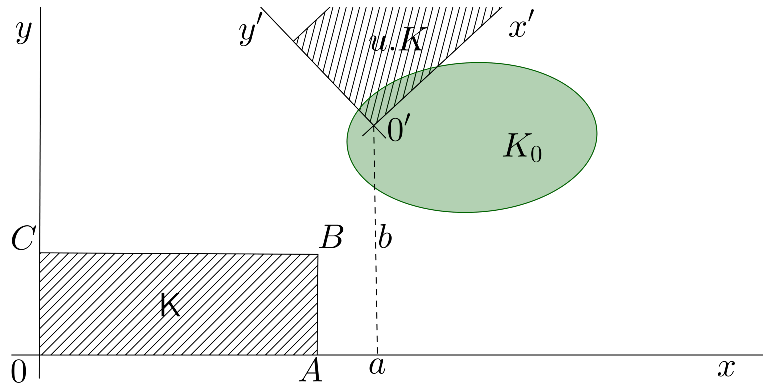
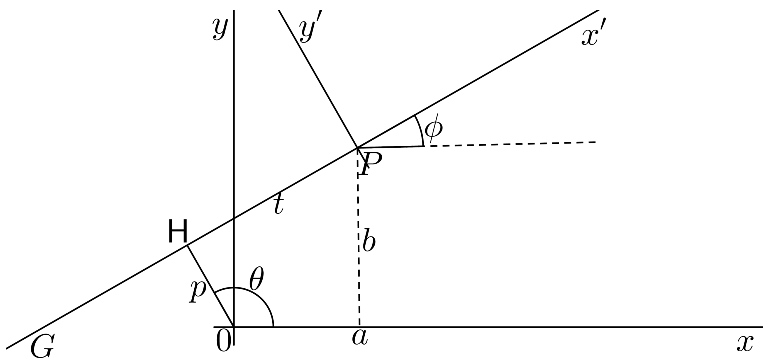


Figura 4.3: Posições do reângulo K e domínio K_0

reta orientada $\overrightarrow{Px'}$ faz com o eixo x. Se nós definimos esse referencial móvel por essas novas coordenadas vamos obter uma nova expressão para dK.

Lema 4.22 *Sejam $(P;x',y')$ um referencial móvel, $\overrightarrow{Px'}$ uma reta orientada que denotaremos por $G(p,\theta)$, onde p é a distância da reta $\overrightarrow{Px'}$ à origem do sistema de coordenadas $(0;x,y)$ e ϕ o ângulo desta reta com o eixo x, e $t = \overline{PH}$, onde P é o ponto da reta $\overrightarrow{Px'}$ com sua perpendicular que passa por 0. Assim as fórmulas para a transformação $(p,\theta,t) \rightarrow (a,b,\phi)$, onde θ é o ângulo do segmento p com o eixo x, são dadas por:*

$$a = p.cos\theta + t.sin\theta \quad (4.2) \qquad b = p.sin\theta - t.cos\theta \quad (4.3) \qquad \phi = \theta - \frac{\pi}{2} \qquad (4.4)$$



Demonstração: Obtemos as transformações 4.2 e 4.3 diretamente da transformação 4.4 e de que $a = p.cos\theta + t.cos\phi$ e $b = p.sin\theta + t.sin\phi$. A transformação 4.3 é obtida diretamente à partir de observações geométricas tomadas as hipóteses. □

Proposição 4.23 *Seja a densidade cinemática dada pela Observação 4.16 ($dK = da \wedge db \wedge d\phi$) temos que*

$$dK = dG^{*} \wedge dt, \qquad (4.5)$$

onde G^* denota que a reta G deve ser considerada com orientação.

Demonstração: A demonstração segue diretamente do Lema 4.22, diferenciando-se as equações 4.2, 4.3 e 4.4 e calculando o produto exterior. Além disso, note que $dG^* = dp \wedge d\theta$ e, assim, obtemos:

$$dK = da \wedge db \wedge d\phi = dp \wedge d\theta \wedge dt = dG^* \wedge dt$$

□

Proposição 4.24 *Sejam um conjunto convexo K_0 cuja área é dada por F_0 e perímetro L_0 e K um segmento orientado de comprimento l. A medida do conjunto de segmentos congruentes a K que interceptam K_0, ou seja, o grupo de movimentos aplicados em K de modo que $u.K \cap K_0 \neq \emptyset$, é dada por*

$$m(K; K \cap K_0 \neq \emptyset) = 2.pi.F_0 + 2.l.L_0$$

Demonstração: Para a demonstração escolheremos a equação 4.5 obtida na Proposição 4.23 para densidade cinemática, assim temos que

$$dK = dG^* \wedge dt$$

Pela Definição 4.19 temos que a medida para esse grupo de movimentos é a integral da a equação acima sobre as restrições do seu problema. Portanto,

$$m(K; K \cap K_0 \neq \emptyset) = \int_{K \cap K_0 \neq \emptyset} dK = \int_{K \cap K_0 \neq \emptyset} dG^* \wedge dt = 2 \int_{K \cap K_0 \neq \emptyset} dG \wedge dt \tag{4.6}$$

Para calcularmos explicitamente essa integral, vamos utilizar a seginte expressão para dt:

$$dt = ds + p.d\theta, \tag{4.7}$$

onde ds representa uma variação infinitesimal de da e db na direção ϕ. Seja σ o comprimento da corda de K que intercepta K_0. Logo, substituindo a equação 4.7 em

4.6, temos que

$$\begin{aligned}
m(K;K\cap K_0\neq\emptyset) &= 2\left(\int_{K\cap K_0\neq\emptyset} dsdG + pd\phi dG\right)\\
&= 2\left[\left(\int_{G\cap K_0\neq\emptyset} dsdG\right)+\left(\int_{G\cap K_0\neq\emptyset} pd\phi dG\right)\right]\\
&= 2\left[\left(\int_{G\cap K_0\neq\emptyset} \sigma dG\right)+\left(\int_{G\cap K_0\neq\emptyset} ldG\right)\right]\\
&= 2\left[\left(\int_{G\cap K_0\neq\emptyset} \sigma dp\wedge d\theta\right)+\left(l\int_{G\cap K_0\neq\emptyset} dG\right)\right]\\
&= 2\left[\left(\int_0^{\pi}\int_{G\cap K_0\neq\emptyset} \sigma dp\wedge d\theta\right)+(l.L_0)\right]\\
&= 2\left[(\pi.F_0)+(l.L_0)\right]\\
&= 2.pi.F_0+2.l.L_0 \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

□

A equação 4.7 desta demonstração será demonstrada detalhadamente no Apêndice deste relatório.

Exemplo 4.25 Vamos avaliar a medida de um conjunto K, de segmentos orientados, de comprimento l que não podem interceptar dois lados não-consecutivos e interceptam exatamente i lados de um poligono convexo K_0. Seja m_0 a medida de um conjunto de segmentos K que não interceptam nenhum dos lados de K_0. Seja m_1 a medida de um conjunto de segmentos K que interceptam exatamente 1 dos lados de K_0. Seja m_2 a medida de um conjunto de segmentos K que interceptam exatamente 2 dos lados de K_0. Temos que m_0, m_1 e m_2 caracterizam todas as possibilidades de posições dos segmentos de K. Pois, suponha, por absurdo, que consideremos a medida m_3, de modo que fosse a medida de um conjunto K que interceptam exatamente 3 dos lados de K_0. Mas, por hipótese, os segmentos não podem interceptar dois lados não-consecutivos, o que excluio caso em que ocorre m_3. Podemos generalizar o raciocinio para m_n e, pela hipótese obteremos que é necessário e suficiente $n\leq 2$, $n\in\mathbb{N}$, para caracterizar todas as possibilidades de posições dos segmentos de K. Assim, temos que:

$$\begin{cases}
m_0+m_1+m_2 &= 2.\pi.F_0+2.l.L_0\\
m_1+2.m_2 &= 4.l.L_0\\
m_2 &= \frac{l^2}{2}\sum_{A_i}((\pi-A_i).cotgA_i-1)
\end{cases} \qquad (4.9)$$

onde $A_{i's}$ representam cada um dos ângulos entre os lados de K_0. Resolvendo o sistema 4.6 temos que

$$\begin{cases} m_0 &= 2.\pi.F_0 - 2.l.L_0 + \frac{l^2}{2}\sum\limits_{A_i}((\pi - A_i).cotgA_i - 1) \\ m_1 &= 4.l.L_0 - l^2\sum\limits_{A_i}((\pi - A_i).cotgA_i - 1) \\ m_2 &= \frac{l^2}{2}\sum\limits_{A_i}((\pi - A_i).cotgA_i - 1) \end{cases} \tag{4.10}$$

As equações utilizadas no sistema 4.9 serão demonstradas no Apêndice deste relatório.

Algumas fórmulas integrais são obtidas análisando como conjuntos convexos se interceptam, o desenvolvimento dessas fórmulas não são necessárias para a resolução do problema que será proposto na Conclusão deste relatório, entretando são de grande importância para outros problemas, portanto serão apresentadas no Apêndice deste relatório.

5 Conclusões

Nesta seção destacamos um problema importante da Geometria Integral que fez parte do nosso estudo.

Exemplo 5.1 (Problema da Agulha de Buffon) Considere sobre um plano Π um conjunto $\mathcal{C}$ de retas paralelas que distam D uma da outra. Qual é a probabilidade de que uma agulha de tamanho $l < D$, jogada aleatoriamente sobre Π intersepte uma das retas de $\mathcal{C}$?

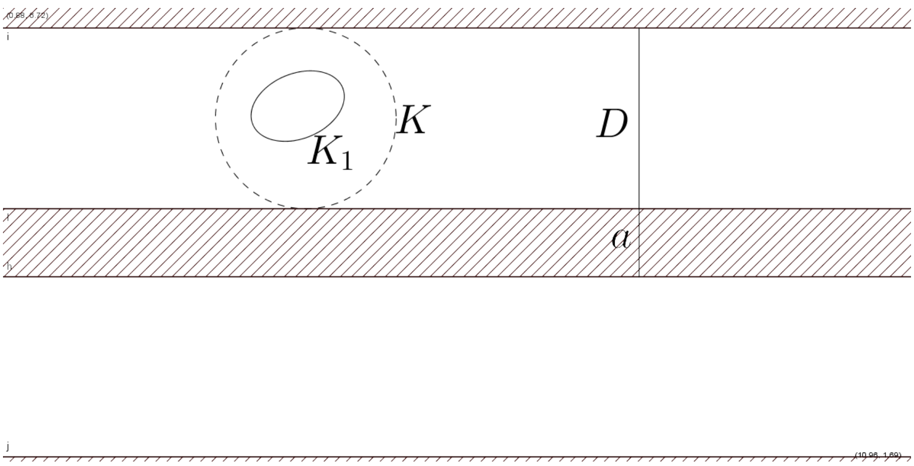


Figura 5.1: Problema Agulha de Buffon

Demonstração: Tome aleatoriamente um conjunto convexo K de largura constante igual a D e um conjunto convexo K_1 contido em K sobre um plano no qual são consideradas faixas B de largura a, distantes D uma da outra. Assim K encontrará uma única faixa B e a probabilidade que K_1 encontre uma destas faixas é

$$p = \frac{L_1 + \pi.a}{L + \pi.a},$$

onde L e L_1 denotam os comprimentos de K e K_1, respectivamente. Como $L = \pi.D$ então

$$p = \frac{L_1 + \pi.a}{\pi(D + a)}.$$

O problema da agulha de Buffon pode ser então resolvido tomando-se $a = 0$ (as faixas reduzme-se a retas) e K_1 como um segmento de reta de comprimento $L_1 = 2.s$. Consequentemente

$$p = \frac{2.s}{\pi.D}$$

$\square$

Exemplo 5.2 (Probabilidade de detectar um dominio convexo por uma procura linear) Seja K_0 um dominio convexo dentro do qual está outro dominio convexo K. O processo de fazer um corte aleatório em K_0 encontrar K é chamado de **procura linear**. Para o problema em questão suponha K um retângulo de lados $a, b (a > s, b > s)$, onde s é o compimento das retas em K_0. Qual a probabilidade desse reta em K_0 interseptar o retângulo K.

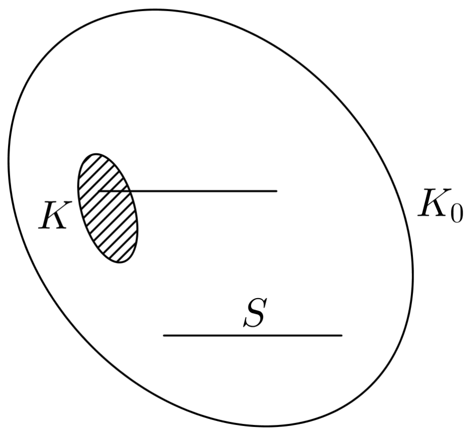


Figura 5.2: Problema da Procura Linear

Demonstração: Suponha que todas as retas que estão em K_0 formem um conjunto S. Por definição de probabilidade temos que

$$p = \frac{m(S; S \cap K \neq \emptyset)}{m(s \subset K_0)} \tag{5.1}$$

Segue da equação 4.8 da Proposição 4.24 que

$$m(S; S \cap K \neq \emptyset) = 2.\pi.F + 2.s.L, \tag{5.2}$$

onde F denota a área de K, s o comprimento das retas de S e L o perimetro de K.

Note que, $m(s \subset K_0) = m_0$, onde m_0 está bem definido no Exemplo 4.25, logo

$$\begin{aligned}
m(s \subset K_0) &= m_0 \\
&= 2.\pi.F_0 - 2.l.L_0 + \frac{l^2}{2}\sum_{A_i}((\pi - A_i).cotgA_i - 1) \\
&= 2.\pi.a.b - 2.l.(2.a + 2.b) + \frac{l^2}{2}.4.\left(\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right).cotg\frac{\pi}{2} - 1\right) \\
&= 2.\left[\pi.a.b - l.(2.a + 2.b) + l^2\left(\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right).\frac{cos\pi/2}{sin\pi/2} - 1\right)\right] \\
&= 2.\left[\pi.a.b - 2.l.(a + b) + l^2(-1)\right] \\
&= 2.\left(\pi.a.b - 2.l.(a + b) - l^2\right) \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

Agora, usando 5.3 e 5.2 em 5.1 segue que

$$p = \frac{\pi.F + s.L}{\pi.a.b - 2.l.(a + b) - l^2}$$

□

6.1 As formas explicitas para L_s e R_s

De acordo com a Definição 4.11 temos que a transformação a esquerda é dada por $L_s : u \to s \cdot u$. Sejam as seguintes matrizes que representam u, uma transformação arbitrária, e s como na Definição 4.11

$$u = \begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi & a \\ sin\phi & cos\phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad s = \begin{pmatrix} cos\phi_0 & -sin\phi_0 & a_0 \\ sin\phi_0 & cos\phi_0 & b_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos então que

$$L_s : \begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi & a \\ sin\phi & cos\phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} cos\phi_0 & -sin\phi_0 & a_0 \\ sin\phi_0 & cos\phi_0 & b_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi & a \\ sin\phi & cos\phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} cos(\phi+\phi_0) & -sin(\phi+\phi_0) & a.cos\phi_0 - b.sin\phi_0 + a_0 \\ sin(\phi+\phi_0) & cos(\phi+\phi_0) & a.sin\phi_0 + b.cos\phi_0 + b_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, concluimos o que queríamos, ou seja, a transformação a esqueda pode ser dada explicitamente da seguinte maneira

$$L_s \begin{cases} a & \to a.cos(\phi_0) - b.sin(\phi_0) + a_0 \\ b & \to a.sin(\phi_0) + b.cos(\phi_0) + b_0 \\ \phi & \to \phi + \phi_0 \end{cases}$$

Analogamente, temos a transformação a direita dada por $R_s : u \to u \cdot s$. Sejam s e u da maneira que expressamos acima, logo

$$R_s : \begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi & a \\ sin\phi & cos\phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi & a \\ sin\phi & cos\phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos\phi_0 & -sin\phi_0 & a_0 \\ sin\phi_0 & cos\phi_0 & b_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} cos(\phi_0+\phi) & -sin(\phi_0+\phi) & a_0.cos\phi - b_0.sin\phi + a \\ sin(\phi_0+\phi) & cos(\phi_0+\phi) & a_0.sin\phi + b_0.cos\phi + b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, concluimos o que queríamos, ou seja, a transformação a direita pode ser dada explicitamente da seguinte maneira

$$R_s \begin{cases} a & \to a_0.cos(\phi) - b.sin(\phi) + a \\ b & \to a_0.sin(\phi) + b.cos(\phi) + b \\ \phi & \to \phi_0 + \phi \end{cases}$$

6.2 As expressões para as $1-formas$ em $\mathfrak{M}$

Para encontrar uma forma explicita para as $1-formas$ invariantes a aplicação $L_s^*: \omega(u) \to \omega(s \cdot u)$ consedere a matriz $\Omega_L := u^{-1}du$. Vamos verificar que Ω_L é realmente invariante a L_s^*

$$L_s^*\Omega_L = (s\cdot u)^{-1}d(s\cdot u) = u^{-1}\cdot s^{-1}\cdot s\cdot du = u^{-1}du = \Omega_L$$

Assim, os elementos de Ω_L são $1-formas$ invariantes a aplicação L_s^*. Para definir explicitamente os elementos de Ω_L considere a matriz $u \in \mathfrak{M}$, sua inversa e sua diferencial.

$$u = \begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi & a \\ sin\phi & cos\phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad u^{-1} = \begin{pmatrix} cos\phi & sin\phi & -a.cos\phi - b.sin\phi \\ -sin\phi & cos\phi & a.sin\phi - b.cos\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$du = \begin{pmatrix} -sin\phi.d\phi & -cos\phi.d\phi & da \\ cos\phi.d\phi & -sin\phi.d\phi & db \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Temos então que

$$\Omega_L = u^{-1}du = \begin{pmatrix} cos\phi & sin\phi & -a.cos\phi - b.sin\phi \\ -sin\phi & cos\phi & a.sin\phi - b.cos\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -sin\phi.d\phi & -cos\phi.d\phi & da \\ cos\phi.d\phi & -sin\phi.d\phi & db \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -d\phi & cos\phi.da + sin\phi.db \\ d\phi & 0 & -sin\phi.da + cos\phi.db \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, concluimos o que queríamos, ou seja, as $1-formas$ invariantes a aplicação L_s^* podem ser dadas explicitamente da seguinte maneira

$$L_s^* \begin{cases} \omega_1 = cos(\phi).da + sin(\phi).db \\ \omega_2 = -sin(\phi).da + cos(\phi.db \\ \omega_3 = d\phi \end{cases}$$

Analogamente, para encontrar as $1-formas$ invariantes a aplicação $R_s^* : \omega(u) \to \omega(u \cdot s)$ considere a matriz $\Omega_R := duu^{-1}$. Vamos verificar que Ω_R é realmente invariante a R_s^*

$$R_s^* \Omega_R = d(u \cdot s)(u \cdot s)^{-1} = du \cdot s \cdot s^{-1} \cdot u^{-1} = duu^{-1} = \Omega_R$$

Assim, os elementos de Ω_R são $1-formas$ invariantes a aplicação R_s^*. Para definir explicitamente os elementos de Ω_R considere a matriz $u \in \mathfrak{M}$, sua inversa e sua diferencial dadas acima. Temos então que

$$\Omega_R = duu^{-1} = \begin{pmatrix} -sin\phi.d\phi & -cos\phi.d\phi & da \\ cos\phi.d\phi & -sin\phi.d\phi & db \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos\phi & sin\phi & -a.cos\phi - b.sin\phi \\ -sin\phi & cos\phi & a.sin\phi - b.cos\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & d\phi & b.d\phi + da \\ d\phi & 0 & -a.d\phi + db \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, concluimos o que queríamos, ou seja, as $1-formas$ invariantes a aplicação R_s^* podem ser dadas explicitamente da seguinte maneira

$$R_s^* \begin{cases} \omega^1 = b.d\phi + da \\ \omega^2 = -a.d\phi + db \\ \omega^3 = d\phi \end{cases}$$

6.3 A equação 4.7

Considere as equações 4.2 e 4.3 do Lema 4.22. Vamos considerar o seguinte sistema

$$\begin{cases} a = p.cos\theta + t.sin\theta \\ b = p.sin\theta - t.cos\theta \end{cases} \tag{6.1}$$

Multiplicamos as equações do sistema 6.1 por $(sin\theta)$ e $(-cos\theta)$, respectivamente. Assim, obtemos

$$\begin{cases} sin\theta.a & = p.cos\theta.sin\theta + t.sin^2\theta \\ -cos\theta.b & = -p.sin\theta.cos\theta + t.cos^2\theta \end{cases}$$

$$sin\theta.a - cos\theta.b = t \tag{6.2}$$

Diferenciando a equação 6.2 obtemos

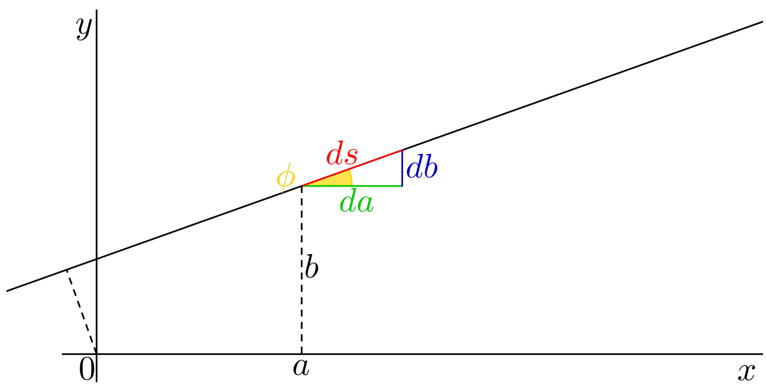
$$dt = sin\theta.da - cos\theta.db + (a.cos\theta + b.sin\theta).d\theta \tag{6.3}$$

Multipliquemos, novamente, as equações do sistema 6.1 por $(cos\theta)$ e $(sin\theta)$, respectivamente. Assim, obtemos

$$\begin{cases} cos\theta.a = p.cos^2\theta + t.sin\theta.cos\theta \\ sin\theta.b = p.sin^2\theta - t.cos\theta.sin\theta \end{cases}$$

$$cos\theta.a + sin\theta.b = p \tag{6.4}$$

Observe também que podemos considerar infinitésimos da e db na direção ϕ, tendo somente como restrição que $K \cap K_0 \neq \emptyset$ e K é determinado pela reta G. Como mostra a figura a seguir



Desta maneira, considerando os movimentos de K. Temos:

$$\begin{cases} da = cos\phi.ds \\ db = sin\phi.ds \end{cases}$$

Utilizando a equação 4.4 do Lema 4.22. Temos que

$$\begin{cases} da = sin\theta.ds \\ db = -cos\theta.ds \end{cases} \tag{6.5}$$

Multiplicamos as equações do sistema 6.5 por $(sin\theta)$ e $(-cos\theta)$, respectivamente. Assim, obtemos

$$\begin{array}{c} \begin{cases} sin\theta.da = sin^2\theta.ds \\ -cos\theta.db = cos^2\theta.ds \end{cases} \\ \hline sin\theta.da - cos\theta.db = ds \end{array} \tag{6.6}$$

Finalmente, substituindo as equações 6.4 e 6.6 na equação 6.3 obtemos o que queríamos, ou seja, a seguinte equação para dt

$$dt = ds + p.d\theta,$$

6.4 O sistema de equações 4.9

As equações do sistema 4.9 serão detalhadas nas próximas seções uma a uma.

6.4.1 Primeira equação

$$\boxed{m_0 + m_1 + m_2 = 2.\pi.F_0 + 2.l.L_0}$$

Para entender essa equação vamos considerar a medida para um conjunto de segmentos orientados que interceptam um conjunto convexo. Essa medida foi obtida na proposição 4.24 e é dada por

$$m(K; K \cap K_0 \neq \emptyset) = 2.pi.F_0 + 2.l.L_0$$

Para essa medida são considerados os segmentos que estão no interios do conjunto convexo m_0, os segmentos que interceptam o bordo 1 vez m_1 e os que interceptam 2 vezes o bordo m_2. Não existem segmentos que interceptem o bordo do convexo 3 vezes justamente pois ele é um convexo. Assim concluímos que

$$m_0 + m_1 + m_2 = m(K; K \cap K_0 \neq \emptyset) = 2.pi.F_0 + 2.l.L_0$$

Portanto, a primeira equação do sistema 4.9 segue como queríamos.

6.4.2 Segunda equação

$$\boxed{m_1 + 2.m_2 = 4.l.L_0}$$

Para essa equação vamos enunciar o seguinte exemplo

Exemplo 6.1 Vamos avaliar a medida de um conjunto de segmentos orientados K, de comprimento l, que interceptam os lados de uma curva poligonal Γ, de comprimento L_0 e sem auto-intersecções. Pela Definição 4.19 temos que a medida para esse grupo de movimentos é a integral da densidade cinemática sobre as restrições do seu problema. Portanto

$$m(K; K \cap \Gamma \neq \emptyset) = \int_{K \cap \Gamma \neq \emptyset} dK$$

Suponha agora que a poligonal Γ seja composta de n lados, pela equação 4.8 da Proposição 4.24, considerando que temos duas orientações para a curva Γ e a área F_0 de Γ é nula, temos que

$$\int_{K \cap \Gamma \neq \emptyset} dK = \int_{K \cap \Gamma_i} n dK = 2.(2.pi.F_0 + 2.l.L_0) = 4.l.L_0$$

Ou seja,

$$m(K; K \cap \Gamma \neq \emptyset) = 4.l.L_0$$

Para a medida obtida no exemplo 6.1 temos que serão considerados os segmentos que interceptam o bordo 1 vez m_1 e duas vezes os segmentos que interceptam o bordo $2.m_2$, pois a curva Γ não possui interior logo $m_0 = 0$. Assim concluímos que

$$m_1 + 2.m_2 = m(K; K \cap \Gamma \neq \emptyset) = 4.l.L_0$$

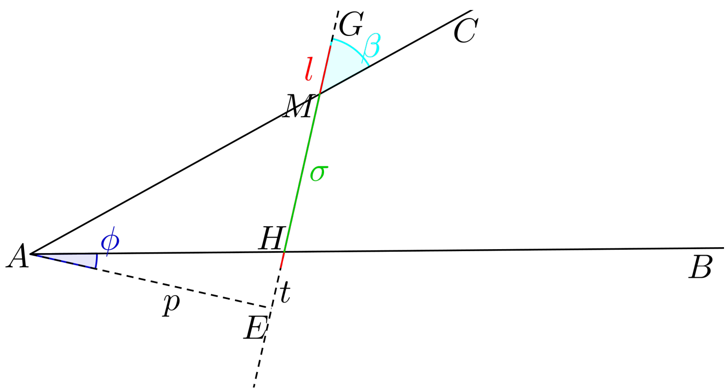
Portanto, a segunda equação do sistema 4.9 segue como queríamos.

6.4.3 Terceira equação

$$\boxed{m_2 = \frac{l^2}{2}\sum_{A_i}((\pi - A_i).cotgA_i - 1)}$$

Para essa equação vamos enunciar o seguinte exemplo

Exemplo 6.2 Vamos avaliar a medida de um conjunto de segmentos orientados K, de comprimento l, que interceptem ambos os lados de um ângulo dado A (será denotado da mesma maneira o vértice A do ângulo e sua medida). Denotaremos por σ a corda que corte o ângulo A por uma reta G que contem K.



Pela Definição 4.19 temos que a medida para esse grupo de movimentos é a integral da densidade cinemática sobre as restrições do seu problema. Portanto

$$\begin{aligned}
m(K; K\cap\overline{AB}\neq\emptyset, K\cap\overline{AC}\neq\emptyset) &= \int_{K\cap\overline{AB}\neq\emptyset, K\cap\overline{AC}\neq\emptyset} dK \\
&= \int_{K\cap\overline{AB}\neq\emptyset, K\cap\overline{AC}\neq\emptyset} dG^* \wedge dt \\
&= 2.\int_{K\cap\overline{AB}\neq\emptyset, K\cap\overline{AC}\neq\emptyset} dt dG \\
&= 2.\int_{K\cap\overline{AB}\neq\emptyset, K\cap\overline{AC}\neq\emptyset} (l-\sigma) dG \\
&= 2.\left(\int_{K\cap\overline{AB}\neq\emptyset, K\cap\overline{AC}\neq\emptyset} l dG - \int_{K\cap\overline{AB}\neq\emptyset, K\cap\overline{AC}\neq\emptyset} \sigma dG\right) \\
&= 2.\left(\int_{\sigma\leq l} l dG - \int_{\sigma\leq l} \sigma dG\right) \\
&= 2.\left(l.\int_{\sigma\leq l} dp\wedge d\phi - \int_{\sigma\leq l} \sigma dp\wedge \phi\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2.\left(l.\int_{\sigma\leq l}|\overline{AE}|d\phi - \int_{\sigma\leq l}\sigma dp\phi\right)\\
&= 2.\left(2.\int_{A}^{\pi}Td\phi - \int_{A}^{\pi}Td\phi\right)\\
&= \int_{A}^{\pi}2.Td\phi\\
&= \int_{0}^{\pi-A}2.Td\phi \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

onde T representa a área do triângulo AHM. Para podermos avaliar 6.7 vamos tentar construir uma função $T(\phi)$. Temos que $\beta = \frac{\pi}{2} - (\phi + A)$. Assim pela lei dos senos temos que

$$\frac{l}{sinA} = \frac{|\overline{AH}|}{sin\beta} = \frac{|\overline{AH}|}{cos(\phi + A)} \qquad (6.8)$$

Definamos h como a altura do triângulo AHM com relação a base $\overline{AH}$. Temos que

$$sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{h}{l} \Leftrightarrow h = l.cos\phi \qquad (6.9)$$

Multiplicando a equação 6.8 por h e, posteriormente, utilizando a equação 6.9, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{l.h}{sinA} &= \frac{|\overline{AH}|.h}{cos(\phi + A)}\\
\frac{l^2.cos\phi}{sinA} &= \frac{2.T}{cos(\phi + A)}\\
2.T &= \frac{l^2}{sinA}.cos\phi.cos(\phi + A) \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

Assim, obtemos uma função $T(\phi)$ conveniente, da substituição de 6.10 em 6.7 segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi-A}2.Td\phi &= \int_0^{\pi-A}\frac{l^2}{sinA}.cos\phi.cos(\phi + A)d\phi\\
&= \frac{l^2}{sinA}\left\{\int_0^{\pi-A}cos\phi.(cosA.cos\phi - sinA.sin\phi)d\phi\right\}\\
&= \frac{l^2}{sinA}\left\{\int_0^{\pi-A}cosA.cos^2\phi d\phi - \int_0^{\pi-A}sinA.sin\phi.cos\phi d\phi\right\}\\
&= \frac{l^2}{sinA}\left\{cosA.\int_0^{\pi-A}cos^2\phi d\phi - sinA\int_0^{\pi-A}sin\phi.cos\phi d\phi\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{l^2}{sinA}\left\{cosA.\int_0^{\pi-A}\frac{1+cos(2.\phi)}{2}d\phi - sinA\int_0^{\pi-A} sin\phi.cos\phi d\phi\right\} \\
&= \frac{l^2}{sinA}\left\{\frac{cosA}{2}.\left[\int_0^{\pi-A} 1d\phi + \int_0^{\pi-A} cos(2.\phi)d\phi\right] - sinA\int_0^{\pi-A} sin\phi.cos\phi d\phi\right\} \\
&= \frac{l^2}{sinA}\left\{\frac{cosA}{2}.\left[(\pi-A)+\frac{sin(s.\phi)}{2}\right]_0^{\pi-A} - sinA.\left(\frac{sin^2\phi}{2}\right)_0^{\pi-A}\right\} \\
&= \frac{l^2}{sinA}\left\{\frac{cosA}{2}.\left[(\pi-A)+\frac{sin(2.(\pi-A))}{2}\right] - sinA.\frac{sin^2(\pi-A)}{2}\right\} \\
&= \frac{l^2}{2.sinA}\left[(\pi-A).cosA - sinA.cos^2A - sinA.sin^2A\right] \\
&= \frac{l^2}{sinA}\left((\pi-A).cotA-1\right) \qquad (6.11)
\end{aligned}
$$

Segue da equação 6.7 e da equação 6.11 que

$$m(K; K\cap\overline{AB}\neq\emptyset, K\cap\overline{AC}\neq\emptyset) = \frac{l^2}{sinA}\left((\pi-A).cotA-1\right)$$

Para a medida obtida no exemplo 6.2 temos que serão considerados somente os segmentos que interceptam o bordo duas vezes, assim sendo um convexo cujo bordo é uma poligonal, para m_2 teremos um somatório de cada ângulo sobre a medida obtida no exemplo 6.2. Assim concluimos que

$$m_2 = \sum_{A_i} m(K; K\cap\overline{AB}\neq\emptyset, K\cap\overline{AC}\neq\emptyset) = \frac{l^2}{2}\sum_{A_i}\left((\pi-A_i).cotgA_i-1\right)$$

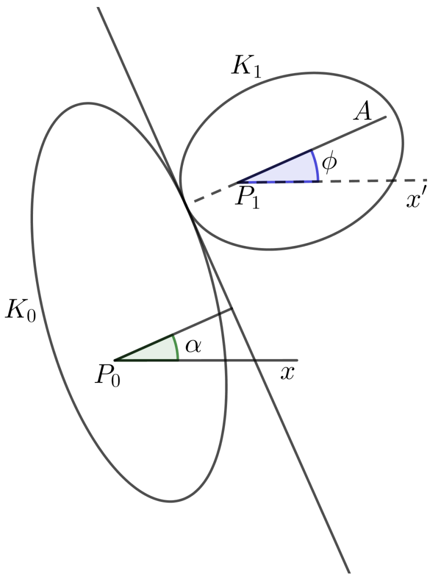
Portanto, a terceira equação do sistema 4.9 segue como queríamos.

6.5 Algumas fómulas integrais

Proposição 6.3 *Sejam K_1 um conjunto convexo de área F_1 e perímetro L_1 e K_0 um conjunto convexo de área F_0 e perímetro L_0. A posição de K_1 é definida pelas coordenadas de $P_1 = (x_1, y_1)$, tal que $P_1 \in K_1$, e pelo ângulo ϕ, que é o ângulo da direção P_1A com a direção P_0x. Tomando a densidade cinemática de K_1 tal que $dK_1 = dx_1 \wedge dy_1 \wedge d\phi$. Temos então que*

$$m(K_1; K_1\cap K_0\neq\emptyset) = 2.\pi.(F_0+F_1) + L_0.L_1 \qquad (6.12)$$

Demonstração: Seja $u \in \mathfrak{M}$ um movimento tal que $u\cdot K_1 \cap K_0 \neq \emptyset$. Queremos calcular a medida das posições de K_1, onde K_1 intersepta K_0. Seja $dK_1 = dx_1 \wedge dy_1 \wedge d\phi$



a densidade cinemática referente ao convexo K_1. Pela Definição 4.19 temos que a medida para esse grupo de movimentos é a integral da densidade cinemática sobre as restrições do seu problema. Portanto

$$m(K_1; K_1 \cap K_0 \neq \emptyset) = \int_{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset} dK_1 = \int_{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset} dx_1 \wedge dy_1 \wedge d\phi$$

Seja $dP_1 = dx_1 \wedge dy_1$, note que $\int_{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset} dP_1 = F_{01}$, onde F_{01} é a área mista de Minkowski. De acordo com com [3] capítulo 1 seção 3 temos que $F_{01} = F_0 + F_1 + 2.F_{01}^*$, onde F_{01}^* é a área mista de K_0 e K_1. Portanto

$$\int_{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset} dx_1 \wedge dy_1 \wedge d\phi = \int_{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset} dP_1 \wedge d\phi = \int_0^{2.\pi} (F_0 + F_1 + 2.F_{01}^*) d\phi$$

De acordo com com [3] capítulo 1 seção 3 temos também que $\int_0^{2.\pi} F_{01}^* d\phi = \frac{1}{2}.L_0.L_1$. Portanto

$$\int_0^{2.\pi} (F_0 + F_1 + 2.F_{01}^*) d\phi = 2.\pi.(F_0 + F_1) + L_0.L_1$$

Portanto, *a medida de todas posições de um conjunto convexo K_1 nas quais ele intercepta outro conjunto convexo fixado K_0 é*

$$m(K_1; K_1 \cap K_0 \neq \emptyset) = \int_{K_1 \cap K_0 \neq \emptyset} dK_1 = 2.\pi.(F_0 + F_1) + L_0.L_1$$

□

Exemplo 6.4 Considere as mesmas condições da Proposição 6.3. Se K_1 é um segmento de comprimento l, então $F_1 = 0$ e $L_1 = 2.l$. Assim a equação 6.12 produz a equação 4.8.

Exemplo 6.5 Tome K_0 e K_1 dois dominios planos, não necessariamente convexos, de áreas F_0 e F_1, respectivamente. Assuma que K_0 esta fixo e K_1 esta em movimento. Tomemos dK_1 a densidade cinemática de K_1. Se $P(x,y)$ é um poto no plano tal que $P \in K_0 \cap K_1$ e $dP = dx \wedge dy$ sua densidade. Vamos considerar a integral

$$I = m(P, K_1; P \in K_0 \cap K_1) = \int_{P \in K_0 \cap K_1} dP \wedge dK_1$$

Vamos calcular essa integral de duas maneiras. Primeiramente, vamos deixar P fixo, então temos

$$\begin{aligned} I &= \int_{P \in K_0 \cap K_1} dP \wedge dK_1 \\ &= \int_{P \in K_0} dP \int_{P \in K_1} dK_1 \\ &= F_0 . \int_{P \in K_1} dx \wedge dy \wedge d\phi \\ &= 2.\pi.F_0 . \int_{P \in K_1} dx \wedge dy \\ &= 2.\pi.F_0 . \int_{P \in K_1} dP \\ &= 2.\pi.F_0.F_1 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Podemos também fixar K_1, então teríamos

$$I = \int_{P \in K_0 \cap K_1} dP \wedge dK_1 = \int_{P \in K_0 \cap K_1} dP dK_1 = \int_{P \in K_0 \cap K_1} f_{01} dK_1, \tag{6.14}$$

onde f_{01} é a área de $K_0 \cap K_1$. Logo, por 6.13 e 6.14

$$\int_{P \in K_0 \cap K_1} f_{01} dK_1 = I = 2.\pi.F_0.F_1 \tag{6.15}$$

Exemplo 6.6 Tome K_0 e K_1 dois dominios planos, não necessariamente convexos, de áreas F_0 e F_1, respectivamente, de modo que suas fronteiras são curvas de comprimento finito L_0 e L_1, respectivamente. Tome $\alpha(s_0)$ e $\alpha(s_1)$ pontos de ∂K_0 e ∂K_1, respectivamente. Vamos considerar a integral

$$J_1 = \int_{\alpha(s_0)\in K_1} ds_0 \wedge dK_1$$

Vamos calcular essa integral de duas maneiras. Primeiramente, vamos deixar $\alpha(s_0)$ fixo, então temos

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\alpha(s_0)\in K_1} ds_0 \wedge dK_1 \\ &= \int_{\partial K_0} ds_0 \int_{\alpha(s_0)\in K_1} dK_1 \\ &= L_0 . \int_{\alpha(s_0)\in K_1} dx \wedge dy \wedge d\phi \\ &= 2.\pi . L_0 . \int_{\alpha(s_0)\in K_1} dx \wedge dy \\ &= 2.\pi . L_0 . \int_{\alpha(s_0)\in K_1} dP \\ &= 2.\pi . L_0 . F_1 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Podemos também fixar K_1, então teríamos

$$J_1 = \int_{\alpha(s_0)\in K_1} ds_0 \wedge dK_1 = \int_{\alpha(s_0)\in K_1} ds_0 dK_1 = \int_{\alpha(s_0)\in K_1} l_{01} dK_1, \tag{6.17}$$

onde l_{01} é o comprimento da curva $\partial K_0 \cap K_1$. Logo, por 6.16 e 6.17

$$\int_{\alpha(s_0)\in K_1} l_{01} dK_1 = J_1 = 2.\pi . L_0 . F_1 \tag{6.18}$$

Vamos considerar agora a seguinte integral

$$J_2 = \int_{\alpha(s_1)\in K_0} ds_1 \wedge dK_0$$

Vamos calcular essa integral de duas maneiras. Primeiramente, vamos deixar $\alpha(s_1)$

fixo, então temos

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{\alpha(s_1)\in K_0} ds_1 \wedge dK_0 \\ &= \int_{\partial K_0} ds_1 \int_{\alpha(s_1)\in K_0} dK_0 \\ &= L_1.\int_{\alpha(s_1)\in K_0} dx\wedge dy\wedge d\phi \\ &= 2.\pi.L_1.\int_{\alpha(s_1)\in K_0} dx\wedge dy \\ &= 2.\pi.L_1.\int_{\alpha(s_1)\in K_0} dP \\ &= 2.\pi.L_1.F_0 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Podemos também fixar K_0, então teríamos

$$J_2 = \int_{\alpha(s_1)\in K_0} ds_1 \wedge dK_0 = \int_{\alpha(s_1)\in K_0} ds_1 dK_0 = \int_{\alpha(s_1)\in K_0} l_{10} dK_0, \tag{6.20}$$

onde l_{10} é o comprimento da curva $\partial K_1 \cap K_0$. Logo, por 6.19 e 6.20

$$\int_{\alpha(s_1)\in K_0} l_{10} dK_0 = J_2 = 2.\pi.L_1.F_0 \tag{6.21}$$

Mas para a equação 6.20 podemos simplismente fazer uma mudança de índices, ou seja, para 6.20 podemos trocar K_0 por K_1 e o inverso, pois não há distinções entre os domínios. Portanto, 6.20 torna-se

$$\int_{\alpha(s_0)\in K_1} l_{10} dK_1 = J_2 = 2.\pi.L_1.F_0 \tag{6.22}$$

Finalmente, somando 6.18 e 6.22 temos que

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(s_0)\in K_1} l_{10} dK_1 + \int_{\alpha(s_0)\in K_1} l_{01} dK_1 &= 2.\pi.L_1.F_0 + 2.\pi.L_0.F_1 \\ \int_{\alpha(s_0)\in K_1} L_{01} dK_1 &= 2.\pi.(L_1.F_0 + L_0.F_1), \end{aligned} \tag{6.23}$$

onde L_{01} é a fronteira de $K_0 \cap K_1$.

Exemplo 6.7 Tome K_0, K_1 e K_2 três comjuntos convexos fechados no plano. Queremos calcular a medida $m(K_1, K_2; K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset)$. Sejam dK_1 e dK_2 as densidades cinemática de K_1 e K_2, respectivimanete. Suponha K_0 fixo, pela Definição 4.19 temos que a medida é a integral da densidade cinemática sobre as restrições do seu problema, portanto

$$m(K_1, K_2; K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset) = \int_{K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset} dK_1 \wedge dK_2$$

mantendo K_1 também fixo temos que pela equação 6.12 da Proposição 6.3

$$\int_{K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset} dK_1 \wedge dK_2 = \int_{K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset} [2.\pi.(F_2 + f_{01}) + L_2.L_{01}]\, dK_2$$
$$= 2.\pi.F_2. \int_{K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset} dK_1 + 2.\pi. \int_{K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset} f_{01}\, dK_1 + L_2. \int_{K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset} L_{01}\, dK_1$$

pelas equações 6.12, 6.15 e 6.23 temos que

$$\begin{aligned} 2.\pi.F_2. \int_{K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset} dK_1 + 2.\pi. \int_{K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset} f_{01}\, dK_1 + L_2. \int_{K_0 \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset} L_{01}\, dK_1 \\ = 2.\pi.F_2\,(2.\pi(F_0 + F_1) + L_0.L_1) + 2.\pi.(2.\pi.F_0.F_1) + L_2\,(2.\pi.(F_1.L_0 + L_1.F_0)) \\ = (2.\pi)^2.(F_0.F_2 + F_0.F_1 + F_1.F-2) + 2.\pi.(F_0.L_1.L_2 + F_1.L_0.L_2 + F_2.L_0.L_1) \end{aligned}$$

Exemplo 6.8 (Valores médios e cobertura) seja K_0 um conjunto convexo de área F_0 e perímetro L_0. Sejam $K_1, K_2, \ldots, K_n$ n conjuntos convexos de área F e perímetro L. Suponha que $K_i \cap K_0 \neq \emptyset$. Seja f_r a área de K_0 que tem cobertura por exatamente r conjuntos K_i. Vamos considerar a integral sobre todos os pontos $P \in K_0$ que são cobertos exatamente por r conuntos K_i.

$$I_r = \int dK_1 \wedge \cdots \wedge dK_n \wedge dP$$

Vamos calcular essa integral de duas maneiras. Primeiramente, vamos manter P fixo, então temos

$$\begin{aligned} I_r &= \int dK_1 \wedge \cdots \wedge dK_n \wedge dP \\ &= \int [2.\pi.(F_0 + F) + L.L_0]\, dK_2 \wedge \cdots \wedge dK_n \wedge dP \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int [(2.\pi.F) + (2.\pi.F_0 + L.L_0)]\, dK_2 \wedge \cdots \wedge dK_n \wedge dP \\
&= \int [(2.\pi.F) + (2.\pi.F_0 + L.L_0)].\,[(2.\pi.F) + (2.\pi.F_0 + L.L_0)]\, dK_3 \wedge \cdots \wedge dK_n \wedge dP \\
&= \int [(2.\pi.F) + (2.\pi.F_0 + L.L_0)]^n\, dP \\
&= \int \binom{n}{r}(2.\pi.F)^r.(2.\pi.F_0 + L.L_0)^{n-r} dP \\
&= \binom{n}{r}(2.\pi.F)^r.(2.\pi.F_0 + L.L_0)^{n-r} \int dP \\
&= \binom{n}{r}(2.\pi.F)^r.(2.\pi.F_0 + L.L_0)^{n-r}.F_0 \qquad (6.24)
\end{aligned}$$

Por outro lado, se deixarmos $K_1, K_2, \ldots, K_n$ fixados, temos que

$$I_r = \int dK_1 \wedge \cdots \wedge dK_n \wedge dP = \int dP dK_1 \ldots dK_n = \int f_r dK_1 \ldots dK_n \qquad (6.25)$$

Portanto, de 6.24 e 6.25, segue que

$$\int f_r dK_1 \ldots dK_n = I_r = \binom{n}{r}(2.\pi.F)^r.(2.\pi.F_0 + L.L_0)^{n-r}.F_0$$

Se quisermos calcular o valor esperado para f_r, temos que

$$\begin{aligned}
E(f_r) &= \frac{m(K_1, \ldots, K_n; \bigcap_{\binom{n}{r}} K_i \cap K_0 \neq \emptyset)}{m(K_1; K_1 \cap K_0 \neq \emptyset) \ldots m(K_n; K_n \cap K_0 \neq \emptyset)} \\
&= \frac{\binom{n}{r}(2.\pi.F)^r.(2.\pi.F_0 + L.L_0)^{n-r}.F_0}{[2.\pi.(F + F_0) + L.L_0]^n}
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

[1] ARNAU, José J. G., *La Estereología como puente entre las matemáticas y otras ciencias*, Sociedad, Ciencia, Tecnología y matemáticas (2006).

[2] BEHRENDS, Ehrhard, BUESCU, Jorge, *Terá Buffon realmente lançado agulhas?*, Boletim da SPM 71, Dezembro 2014, p. 123-132.

[3] SANTALÓ, Luis A., *Integral Geometry and Geometric Probability*, Cambridge University Press, 2004.