



MARCOS AGNOLETTTO FORTE

# **A desigualdade isoperimétrica óptima em variedades de Cartan-Hadamard e a conjectura de Aubin**

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES

**Santo André, 2021**





Universidade Federal do ABC

**Universidade Federal do ABC**

**Centro de Matemática, Computação e Cognição**

**Marcos Agnoletto Forte**

# **A desigualdade isoperimétrica optimal em variedades de Cartan-Hadamard e a conjectura de Aubin**

**Orientador: Prof. Dr. Stefano Nardulli**

**Coorientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva**

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO  
DEFENDIDA PELO ALUNO MARCOS AGNOLETO FORTE,  
E ORIENTADA PELO PROF. DR. STEFANO NARDULLI.

**Santo André, 2021**

**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC**  
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Agnoletto Forte, Marcos

A desigualdade isoperimétrica óptima em variedades de  
Cartan-Hadamard e a conjectura de Aubin / Marcos Agnoletto  
Forte. — 2021.

147 fls.

Orientador: Stefano Nardulli  
Coorientador: Márcio Fabiano da Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC,  
Programa de Pós-Graduação em Matemática, Santo André,  
2021.

1. Variedades de Cartan-Hadamard. 2. geometria  
Riemanniana. 3. geometria métrica. 4. perfil isoperimétrico.  
I. Nardulli, Stefano. II. da Silva, Márcio Fabiano. III.  
Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2021. IV. Título.

**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com anuênci a do(a) (co)orientador(a).**

Santo André, 29 de dezembro de 2021.

  
\_\_\_\_\_  
Marcos Agnoletto Forte

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**Fundação Universidade Federal do ABC**  
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP  
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

**FOLHA DE ASSINATURAS**

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, MARCOS AGNOLETTTO FORTE realizada em 20 de Dezembro de 2021:

p/ Márcio Fabiano da Silva

Prof.(a) GLAUCIO TERRA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

p/ Márcio Fabiano da Silva

Prof.(a) MARCUS ANTONIO MENDONCA MARROCOS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) ALEXANDRE LYMBEROPoulos  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Prof.(a) ICARO GONCALVES  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) STEFANO NARDULLI  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Márcio Fabiano da Silva

Prof.(a) MARCIO FABIANO DA SILVA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

\* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – 88882.451651/2019-01



## RESUMO

Baseados no artigo “Total curvature and the isoperimetric inequality in Cartan-Hadamard manifolds”, de Mohammad Ghomi e Joel Spruck [GS21], estudamos uma fórmula de comparação para a curvatura total de conjuntos de níveis em variedades Riemannianas. Em particular, para os casos em que a variedade tem curvatura seccional constante, ou para bolas geodésicas em variedades com curvatura seccional limitada superiormente por uma constante real negativa. Com o método de Kleiner generalizado, esta fórmula de comparação foi aplicada ao problema isoperimétrico em espaços de curvatura não-positiva de modo a obter uma versão equivalente para a conjectura de Aubin.

**Palavras-chave:** Variedades de Cartan-Hadamard, geometria Riemanniana, geometria métrica, perfil isoperimétrico



## A B S T R A C T

Based on the article “Total curvature and isoperimetric inequality in the Cartan-Hadamard manifolds”, by Mohammad Ghomi and Joel Spruck [[GS21](#)], we study a comparison formula for the total curvature of level sets in Riemannian manifolds. In particular, for cases where a manifold has a constant sectional curvature, or for geodesic balls in a manifold with a sectional curvature bounded above by a negative real constant. With the generalized Kleiner method, this comparison formula was applied to the isoperimetric problem in spaces of non-positive curvature in order to obtain an equivalent version for the Aubin conjecture.

**Keywords:** Cartan-Hadamard manifolds, Riemannian geometry, metric geometry, isoperimetric profile



# CONTÉUDO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1	Definições básicas	3
2.2	Geodésicas e a aplicação exponencial	11
2.3	Curvaturas	17
2.4	Coordenadas normais	22
2.5	Campos de Fermi	26
2.6	Lema de Gauss generalizado	37
2.7	Campos de Jacobi e o conjugated-locus	41
2.8	A segunda forma fundamental	44
2.9	Variedades completas e o Teorema de Hadamard	47
2.10	Teorema de Cartan sobre a determinação da métrica	49
2.11	O cut locus	49
2.12	Suavizadores	51
<b>3</b>	<b>Uma fórmula de comparação para a curvatura total do envoltório convexo</b>	<b>57</b>
3.1	Regularidade e pontos singulares da função distância	57
3.2	Noções de convexidade em variedades de Cartan-Hadamard	76
3.3	Uma fórmula de comparação	87
3.4	Aplicações para a fórmula de comparação	113
3.5	Curvatura do envoltório convexo	122
<b>4</b>	<b>A desigualdade isoperimétrica</b>	<b>135</b>
4.1	A desigualdade para curvatura total em dimensões 2 e 3	141



## 1

## INTRODUÇÃO

Grosso modo, uma **variedade de Cartan-Hadamard**  $M$  é uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional não-positiva. Uma **hipersuperfície convexa (fechada)**  $\Gamma \subset M$  é a fronteira de um conjunto compacto e convexo com interior não vazio. Nas condições da Definição 3.22, se  $\Gamma$  é de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$ , sua **curvatura de Gauss-Kronecker**  $GK$  está bem definida em quase todo ponto, de modo que sua **curvatura total** é  $\mathcal{G}(\Gamma) = \int_{\Gamma} |GK| d\sigma$ , onde  $d\sigma$  é a forma de volume para  $\Gamma$ . Neste contexto, surgem os dois problemas a seguir.

**Problema 1.1.** *Para  $M$  uma variedade de Cartan-Hadamard  $n$ -dimensional e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície convexa de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$ , vale a seguinte desigualdade*

$$\mathcal{G}(\Gamma) \geq \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}), \quad (1)$$

onde  $\mathbb{S}^{n-1}$  denota a esfera unitária em  $\mathbb{R}^n$  e  $\text{vol}$  é o volume?

A resposta para o Problema 1.1 é sim quando  $n = 2, 3$ , devido ao Teorema de Gauss-Bonnet e a equação de Gauss. Mas, para  $n \geq 4$  o problema ainda está aberto. A principal motivação para o estudo do Problema 1.1 é sua conexão com o problema isoperimétrico para variedades de Cartan-Hadamard, a saber:

**Problema 1.2.** *Para  $M$  uma variedade de Cartan-Hadamard  $n$ -dimensional e  $\Omega \subset M$  um conjunto limitado, vale a seguinte desigualdade isoperimétrica*

$$\text{per}(\Omega)^n \geq \frac{\text{per}(\mathbb{B}^n)^n}{\text{vol}(\mathbb{B}^n)^{n-1}} \text{vol}(\Omega)^{n-1}, \quad (2)$$

onde  $\mathbb{B}^n$  é uma bola unitária em  $\mathbb{R}^n$  e  $\text{per}$  é o perímetro, com igualdade somente se  $\Omega$  é uma bola em  $\mathbb{R}^n$ ?

O Problema 1.2 é conhecido como a **conjectura de Cartan-Hadamard** que, em dimensão qualquer, foi introduzida em 1976 por Thierry Aubin [Aub76] e poucos anos

depois por Mikhail Gromov [Mik81] [Mik01], Yuri Burago e Viktor Zalgaller [BV88]. Em dimensão 2, esta conjectura foi verificada como válida em 1926 por André Weil [Bero2] e redescoberta em 1933 por Beckenbach e Radó [BR33]. Em dimensão 3 e 4 a conjectura foi provada por Bruce Kleiner [Kle92] em 1992 e Chris Croke [Cro84] em 1984, respectivamente.

Nesta dissertação de mestrado, estudamos o artigo de Mohammad Ghomi e Joel Spruck [GS21], que foi motivado pelo trabalho de Kleiner [Kle92], no qual mostra-se que para  $n = 3$ , a desigualdade para a curvatura total (1) implica a desigualdade isoperimétrica (2). Em [GS21], Ghomi e Spruck provaram que esta implicação é válida no caso  $n$ -dimensional. Ou seja, uma resposta afirmativa para o Problema 1.1 implica uma resposta afirmativa para o Problema 1.2.

Esta dissertação de mestrado está organizada como a seguir. No Capítulo 2, recordamos algumas definições importantes da geometria Riemanniana e fixamos notação. Além disso, revisamos um conjunto de fatos básicos sobre coordenadas normais e o Lema de Gauss generalizado. Por fim, estudamos a regularidade da aplicação exponencial.

No Capítulo 3, estudamos as ferramentas necessárias para provarmos o Teorema 4.1; em particular, na Seção 3.1 apresentamos alguns fatos básicos sobre a regularidade da função distância em variedades Riemannianas. Na Seção 3.2, discutimos algumas noções de convexidade em variedades de Cartan-Hadamard e mostramos que é suficiente estabelecer a desigualdade (1) para hipersuperfícies com função distância convexa. Dedicamos as Seções 3.3 a 3.5 para o estudo de uma fórmula de comparação, com a qual prova-se que a curvatura total positiva do envoltório convexo de uma hipersuperfície não pode ser maior que a curvatura total positiva da própria hipersuperfície.

Finalmente, no Capítulo 4, é estabelecida a conexão entre os Problemas 1.1 e 1.2.

# 2 | PRELIMINARES

## 2.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

As variedades Riemannianas serão o espaço ambiente no qual estudaremos os resultados obtidos por Mohammad Ghomi e Joel Spruck no artigo “Total curvature and the isoperimetric inequality in Cartan-Hadamard manifolds” [GS21]. Assim, a seguir definimos as métricas Riemannianas e as variedades Riemannianas.

**Definição 2.1.** *Uma métrica Riemanniana de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$ , em uma variedade diferenciável  $M$  é uma lei que faz corresponder a cada  $p \in M$  uma aplicação  $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo,  $\forall u, v, w \in T_p M$  e  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,*

1.  $g_p(u, v) = g_p(v, u)$ .
2.  $g_p(u + v, w) = g_p(u, w) + g_p(v, w)$ .
3.  $g_p(\lambda u, v) = \lambda g_p(u, v) = g_p(u, \lambda v)$ .
4.  $g_p(u, u) \geq 0$ .
5.  $g_p(u, u) = 0 \iff u = 0$ .
6. *Se  $X$  e  $Y$  são campos diferenciáveis em um aberto  $U \subset M$ , então a função:*

$$\begin{aligned} U \subset M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto g_p(X(p), Y(p)) \end{aligned}$$

*é de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$ , em  $U$ .*

**Definição 2.2.** *Uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional e classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$ , é um par  $(M, g)$  onde*

1.  $M$  é uma variedade diferenciável de classe  $\mathcal{C}^k$ .

2.  $g$  é uma métrica Riemanniana em  $M$ .

Em uma variedade Riemanniana podemos construir uma função distância, que será induzida pela métrica Riemanniana da variedade, de forma que a variedade Riemanniana juntamente com esta distância seja um espaço métrico. Além disso, definimos também a distância entre dois conjuntos.

**Definição 2.3.** Uma aplicação diferenciável  $c : I \rightarrow M$  de um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  em uma variedade diferenciável  $M$  chama-se uma **curva**. A restrição de uma curva  $c$  a um intervalo fechado  $[a, b] \subset I$  chama-se **segmento**.

**Definição 2.4.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $c : [a, b] \rightarrow M$  um segmento. Definimos o **comprimento do segmento**  $c$  por

$$l_a^b(c) = \int_a^b \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt.$$

**Definição 2.5.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $p, q \in M$  pontos de  $M$ . Definimos a **distância induzida pela métrica**  $g$  por

$$d(p, q) = d_g(p, q) = \inf_{c \in \Lambda_{pq}} l(c),$$

onde  $c \in \Lambda_{pq}$  se  $c : [a, b] \rightarrow M$  é um segmento de curva em  $M$  com  $c(a) = p$  e  $c(b) = q$ .

**Definição 2.6.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $X, Y \subset M$  subconjuntos de  $M$ . Definimos a **distância entre conjuntos** por

$$d(X, Y) = \inf \{d(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Além disso, fixado um subconjunto  $X \subset M$ , definimos a **distância ao subconjunto**  $X$  por

$$d_X(\cdot) = d(X, \cdot).$$

Além de uma função distância, podemos construir outras ferramentas geométricas em variedades Riemannianas; uma delas é o volume de regiões. Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $p \in M$  um ponto e  $(U, x)$  um sistema de coordenadas de  $M$  tal que  $p \in x(U)$ . Considere uma base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  em  $T_p M$  e, escrevendo  $X_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$  na base  $\{e_i\}$ , isto é,  $X_i(p) = \sum_j a_{ij} e_j$ , obtemos que

$$g_{ik}(p) = \langle X_i, X_k \rangle(p) = \sum_{j,l} a_{ij} a_{kl} \langle e_j, e_l \rangle(p) = \sum_{j,l} a_{ij} a_{kl} \delta_{jl} = \sum_j a_{ij} a_{kj} = (aa^T)_{ik},$$

onde segue-se que  $\det(g_{ij})(p) = \det(aa^T) = \det(a)^2$ . Com isso, através da fórmula para calcularmos o volume de paralelepípedos em  $\mathbb{R}^n$ , podemos calcularmos o volume  $\text{vol}(X_1(p), \dots, X_n(p))$  do paralelepípedo formado pelos vetores  $X_1(p), \dots, X_n(p)$  em  $T_p M$ , pois  $\text{vol}(X_1(p), \dots, X_n(p)) = \det(a)\text{vol}(e_1, \dots, e_n) = \det(a)$ , onde  $\text{vol}(e_1, \dots, e_n)$  é o volume do paralelepípedo formado pelos vetores  $e_1, \dots, e_n$  em  $\mathbb{R}^n$ . Portanto, utilizando somente a expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas  $(U, x)$  temos que

$$\text{vol}(X_1(p), \dots, X_n(p)) = \sqrt{\det(g_{ij})(p)}.$$

Com isso, definimos a seguir o volume de regiões em variedades Riemannianas.

**Definição 2.7.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $R \subset M$  um região, isto é, um subconjunto aberto e conexo de  $M$ , cujo fecho é compacto. Suponha que  $R$  está contida em uma vizinhança coordenada  $x(U)$  de um sistema de coordenadas  $(U, x)$ , e que a fronteira  $x^{-1}(R) \subset U$  tem medida nula em  $\mathbb{R}^n$ . Definimos o volume  $\text{vol}(R)$  de  $R$  pela integral em  $\mathbb{R}^n$*

$$\text{vol}(R) = \int_{x^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n. \quad (3)$$

Uma construção importante para o estudo de variedades diferenciáveis é a de conexão afim, a partir desta construção podemos definir uma estrutura igualmente importante em variedades diferenciáveis, o paralelismo. A seguir definiremos uma conexão afim em uma variedade diferenciável.

**Definição 2.8.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável,  $\mathfrak{X}(M)$  o conjunto dos campos de classe  $C^\infty$  em  $M$  e  $\mathcal{D}(M)$  o anel das funções reais de classe  $C^\infty$  em  $M$ . Definimos uma **conexão afim** em uma variedade diferenciável  $M$  como uma operação*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

tal que

1.  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$
2.  $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$
3.  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$

onde  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ .

Na definição de conexão afim podemos tomar as devidas restrições para um subconjunto aberto  $U \subset M$  e teremos

$$\nabla : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U).$$

Assim, podemos obter sua expressão em coordenadas e, com isso, motivaremos a definição dos símbolos de Christoffel. Tome  $(U, x)$  um sistema de coordenadas; escrevemos  $X = \sum_i x_i X_i$  e  $Y = \sum_i y_i X_i$ , donde temos

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{\sum_j x_j X_j} \left( \sum_i y_i X_i \right) \\ &= \sum_j x_j \nabla_{X_j} \left( \sum_i y_i X_i \right) \\ &= \sum_j x_j \left( \sum_i \left( X_j(y_i) X_i + y_i \nabla_{X_j} X_i \right) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Com isso, podemos definir os símbolos de Christoffel.

**Definição 2.9.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável e considere  $(U, x)$  um sistema de coordenadas em  $M$  e uma conexão afim  $\nabla$  em  $U$ . Definimos os **símbolos de Christoffel**  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $1 \leq i, j, k \leq n$ , de  $\nabla$  no sistema de coordenadas  $(U, x)$  por*

$$\nabla_{X_j} X_i = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k.$$

Da Definição 2.9 concluímos que  $\Gamma_{ij}^k$  são funções diferenciáveis e de (4) obtemos a expressão em coordenadas de uma conexão afim:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_j x_j \left( \sum_i \left( X_j(y_i) X_i + y_i \nabla_{X_j} X_i \right) \right) \\ &= \sum_{j,i} x_j \left( X_j(y_i) X_i + y_i \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k \right) \\ &= \sum_{j,i} \left( x_j X_j(y_i) X_i + x_j y_i \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k \right) \\ &= \sum_k \left( \sum_j x_j X_j(y_k) + \sum_{j,i} x_j y_i \Gamma_{ij}^k \right) X_k. \end{aligned}$$

A partir da escolha de uma conexão afim em uma variedade diferenciável temos uma derivada de campos de vetores ao longo de curvas. A seguinte proposição mostra esse fato.

**Proposição 2.10.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Então existe uma única lei que associa a um campo vetorial  $V = V(t)$  ao longo da curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$ , um outro campo vetorial  $\frac{DV}{dt}$  ao longo de  $c$ , denominado **derivada covariante** de  $V$  ao longo de  $c$ , tal que:

1.  $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$ , onde  $W$  é um campo de vetores ao longo de  $c$ .
2.  $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$ , onde  $f$  é uma função diferenciável em  $I$ .
3. Se  $V$  é induzido por um campo de vetores  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , isto é,  $V(t) = Y(c(t))$ , então  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}Y$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Proposição 2.2, p.57].  $\square$

Obtemos da Proposição 2.10 a expressão clássica para a derivada covariante

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv_k}{dt} + \sum_{j,i} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_j}{dt} v_i \right\} X_k$$

Observe que  $\frac{DV}{dt}$  difere da derivada usual no espaço euclidiano por termos que envolvem os símbolos de Christoffel.

Com isso, temos uma noção natural de paralelismo.

**Definição 2.11.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Um campo vetorial  $V = V(t)$  ao longo de uma curva  $c : I \rightarrow M$  é chamado **paralelo** (com respeito a  $\nabla$ ) quando  $\frac{DV}{dt} = 0$ , para todo  $t \in I$ .

Com esta definição podemos construir o transporte paralelo de vetores ao longo de curvas como segue na proposição abaixo.

**Proposição 2.12.** Sejam  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ ,  $c : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável em  $M$  e  $V_0$  um vetor tangente a  $M$  em  $c(t_0)$ ,  $t_0 \in I$ , isto é,  $V_0 \in T_{c(t_0)}M$ . Então existe um único campo de vetores paralelo  $V = V(t)$  ao longo de  $c$ , tal que  $V(t_0) = V_0$ . ( $V(t)$  é chamado de **transporte paralelo** de  $V_0$  ao longo de  $c$ )

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Proposição 2.6, p.58-59].  $\square$

Note que a definição de conexão afim foi feita em um contexto de variedades diferenciáveis, isto é, não depende da métrica Riemanniana. Assim, queremos relacionar

a conexão afim de uma variedade diferenciável com a métrica Riemanniana de uma variedade Riemanniana. Para isso, faremos as definições de compatibilidade da conexão com a métrica e de conexão simétrica a seguir.

**Definição 2.13.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana com uma conexão afim  $\nabla$ . A conexão é dita compatível com a métrica  $g$ , quando*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

com  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

A partir da definição de compatibilidade da conexão com a métrica em variedades Riemannianas podemos estabelecer algumas equivalências desta definição com relação a derivada covariante, como na próxima proposição.

**Proposição 2.14.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana com uma conexão afim  $\nabla$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $\nabla$  é compatível com a métrica  $g$ .
2. Para todo par  $V$  e  $W$  de campos de vetores ao longo da curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$  tem-se

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

3. Para toda curva diferenciável  $c$  e quaisquer pares de campos de vetores paralelos  $P_1$  e  $P_2$  ao longo de  $c$ , tivermos

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \text{constante}.$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Proposição 3.2, p.59-60 e Corolário 3.3, p. 60].  $\square$

**Definição 2.15.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Dizemos que a conexão afim  $\nabla$  é simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

A partir de uma conexão afim simétrica em uma variedade diferenciável podemos obter uma condição acerca dos símbolos de Christoffel desta conexão, isto é, seja  $M$

uma variedade diferenciável com uma conexão afim simétrica  $\nabla$ . Considere  $(U, x)$  um sistema de coordenadas em  $M$ , então para todo  $i, j = 1, \dots, n$ , temos que

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0,$$

ou ainda,

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k,$$

com  $k = 1, \dots, n$ .

Com as definições de compatibilidade da conexão com a métrica e de uma conexão simétrica podemos construir uma única conexão afim em uma variedade Riemanniana, chamaremos-a de conexão Riemanniana, e as condições para que isso ocorra são descritas no Teorema de Levi-Civita a seguir.

**Teorema 2.16** (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana  $(M, g)$  existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$ , chamada de **conexão Riemanniana**, satisfazendo as condições:*

1.  $\nabla$  é simétrica.
2.  $\nabla$  é compatível com a métrica Riemanniana.

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Teorema 3.6, p.61-62].  $\square$

Com este teorema podemos obter a expressão para os símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana de uma variedade Riemanniana  $(M, g)$ . Considere  $(U, x)$  um sistema de coordenadas em  $M$ . Das condições de simetria e compatibilidade com a métrica dadas pelo Teorema 2.16 para a conexão Riemanniana temos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{X_j} X_i, X_k \rangle &= \frac{1}{2} \{ X_j (\langle X_i, X_k \rangle) + X_i (\langle X_k, X_j \rangle) - X_k (\langle X_j, X_i \rangle) \\ &\quad - \langle [X_j, X_i], X_k \rangle - \langle [X_i, X_k], X_j \rangle - \langle [X_k, X_j], X_i \rangle \} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ji}). \end{aligned} \tag{5}$$

onde  $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$  e  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Por outro lado, obtemos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{X_j} X_i, X_k \rangle &= \langle \sum_l \Gamma_{ij}^l X_l, X_k \rangle \\ &= \sum_l \Gamma_{ij}^l \langle X_l, X_k \rangle \\ &= \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk}. \end{aligned} \tag{6}$$

Como a matriz  $(g_{ij})$  admite uma inversa  $(g^{ij})$ , teremos de (5) e (6) que

$$\begin{aligned} \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} g^{km} &= \frac{1}{2} (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ji}) g^{km} \\ \sum_l \Gamma_{ij}^l \delta_{lm} &= \frac{1}{2} (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ji}) g^{km} \\ \Gamma_{ij}^m &= \frac{1}{2} g^{km} (\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ji}) \end{aligned} \quad (7)$$

Podemos também definir conceitos clássicos, como o campo gradiente de uma função, a hessiana de uma função e a divergência de um campo, para o ambiente de variedades Riemannianas como a seguir.

**Definição 2.17.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f \in \mathcal{D}(M)$ . Definimos o **gradiente de  $f$**  como o campo vetorial  $\text{grad}(f)$  em  $M$  dado por*

$$\langle \text{grad}(f)(p), v \rangle = df_p(v),$$

onde  $p \in M$  e  $v \in T_p M$ .

**Definição 2.18.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f \in \mathcal{D}(M)$ . Defina o **operador hessiana de  $f$**  como*

$$\nabla^2(f)(X) = \nabla_X(\text{grad}(f)).$$

**Definição 2.19.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f \in \mathcal{D}(M)$ . Defina a **hessiana de  $f$**  como*

$$\text{Hess}(f)(X, Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f).$$

Podemos relacionar os conceitos acima, isto é, consideremos  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f \in \mathcal{D}(M)$ . Segue-se diretamente das Definições 2.17, 2.18 e 2.19 que

$$\text{Hess}(f)(X, Y) = \langle \nabla_X \text{grad}(f), Y \rangle = \langle \nabla^2(f)(X), Y \rangle. \quad (8)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X \text{grad}(f), Y \rangle &= X \langle \text{grad}(f), Y \rangle - \langle \text{grad}(f), \nabla_X Y \rangle \\ &= X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) \\ &= X(Y(f)) - \nabla_X Y(f) \\ &= \text{Hess}(f)(X, Y). \end{aligned}$$

**Definição 2.20.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  um campo de vetores em  $M$  e  $p \in M$  um ponto arbitrário em  $M$ . Considere a aplicação  $T_X : T_p M \rightarrow T_p M$  dada por  $T_X(Y(p)) = \nabla_Y X(p)$ . Definimos a **divergência de  $X$**  como a função  $\text{div}_p(X) : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\text{div}_p(X) = \text{trace}(T_X)$ .

**Observação 2.21.** Para a divergência de um campo podemos obter uma expressão em coordenadas. Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  um campo de vetores em  $M$  e  $p \in M$  um ponto arbitrário em  $M$ . Considere  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , um referencial ortonormal de  $T_p M$ . Note que, com respeito a essa base ortonormal, a divergência de  $X$  é dada por:

$$\text{div}_p(X) = \text{trace}(T_X) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle(p).$$

## 2.2 GEODÉSICAS E A APLICAÇÃO EXPONENCIAL

Dois conceitos fundamentais para a geometria são o de geodésica e o de aplicação exponencial. Ambos os conceitos estão relacionados e os exibiremos a seguir.

**Definição 2.22.** Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana. Uma curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma **geodésica** em  $t_0 \in I$  se  $\frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$  no ponto  $t_0$ ; se  $\gamma$  é geodésica em  $t$ , para todo  $t \in I$ , dizemos que  $\gamma$  é uma **geodésica**. Se  $[a, b] \subset I$  e  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma geodésica, a restrição de  $\gamma$  a  $[a, b]$  é chamada **segmento de geodésica** ligando  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$ .

**Lema 2.23.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $\gamma : I \rightarrow M$  uma geodésica em  $M$ . Então existe um único campo  $G$  em  $TM$ , chamado **campo geodésico** e cujo fluxo chamamos de **fluxo geodésico**, cujas trajetórias são da forma  $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t))$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Lema 2.3, p.70-71]. □

**Proposição 2.24** (Existência e unicidade de geodésicas). Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $p \in M$ . Então existem um aberto  $V \subset M$ ,  $p \in V$ , números  $\delta > 0$  e  $\varepsilon_1 > 0$  e uma aplicação de classe  $\mathcal{C}^\infty$

$$\gamma : ]-\delta, \delta[ \times U \rightarrow M,$$

onde  $U = \{(q, v) \in TM : q \in V, v \in T_q M, |v| < \varepsilon_1\}$ , tais que a curva  $t \mapsto \gamma(t, q, v)$ ,  $t \in ]-\delta, \delta[$ , é a única geodésica de  $M$  que no instante  $t = 0$  passa por  $q$  com velocidade  $v$ , para cada  $q \in V$  e cada  $v \in T_q M$  com  $|v| < \varepsilon_1$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Proposição 2.5, p.71].  $\square$

Para a construção da aplicação exponencial precisaremos provar algumas propriedades das geodésicas. Uma dessas propriedades é que podemos aumentar a velocidade de uma geodésica diminuindo o seu intervalo de definição, ou vice-versa, e isto é, essencialmente, o que afirma o próximo lema.

**Lema 2.25** (Homogeneidade de uma geodésica). *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\gamma(t, q, v)$  a geodésica definida no intervalo  $]-\delta, \delta[$ . Então a geodésica  $\gamma(t, q, av)$ ,  $a \in \mathbb{R}, a > 0$ , está definida no intervalo  $]-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}[$  e*

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Proposição 2.6, p.72].  $\square$

A outra propriedade desejada é que podemos tornar o intervalo de definição de uma geodésica uniformemente grande em uma vizinhança do ponto de partida, como a seguir.

**Proposição 2.26.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $p \in M$ . Então existem uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $M$ , um número  $\varepsilon > 0$  e uma aplicação de classe  $C^\infty$ ,*

$$\gamma : ]-2, 2[ \times U \rightarrow M,$$

onde  $U = \{(q, w) \in TM : q \in V, w \in T_q M, |w| < \varepsilon\}$  tais que  $t \mapsto \gamma(t, q, v)$ ,  $t \in ]-2, 2[$ , é a única geodésica de  $M$  que no instante  $t = 0$  passa por  $q$  com velocidade  $w$ , para cada  $q \in V$  e cada  $w \in T_q M$ , com  $|w| < \varepsilon$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Proposição 2.7, p.72].  $\square$

Para  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $p \in M$  um ponto arbitrário e  $v \in T_p M$  temos que a associação  $v \mapsto \gamma(t, p, v)$  define uma aplicação do fibrado tangente  $TM$  no conjunto das geodésicas de  $M$ . Além disso, como uma consequência do Lema 2.25, podemos definir uma outra aplicação de um subconjunto do fibrado tangente para  $M$ , que associa a cada reta saindo da origem de  $T_p M$  à geodésica, da seguinte maneira.

**Definição 2.27.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $p \in M$  e um subconjunto do fibrado tangente  $U \subset TM$  dado por  $U = \{(q, w) \in TM : q \in V, w \in T_q M, |w| < \varepsilon\}$ , onde  $V$  é*

uma vizinhança de  $p$  em  $M$  e  $\varepsilon > 0$  um número. Considere  $t \mapsto \gamma(t, q, v)$ ,  $t \in ]-2, 2[$ , a única geodésica dada pela Proposição 2.26. Chamamos a aplicação  $\exp : U \rightarrow M$  dada por

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v), \quad (q, v) \in U,$$

de **aplicação exponencial** em  $U$ .

**Observação 2.28.** Note que a aplicação exponencial dada pela Definição 2.27 é diferenciável, pois a geodésica  $\gamma$  é dada pelo Teorema de Existência e Unicidade de EDO's, o que garante a diferenciabilidade com relação aos parâmetros. Além disso, a restrição da aplicação exponencial a um aberto do espaço tangente, isto é,

$$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$$

será dada por  $\exp_q(v) = \exp(q, v)$ . Assim,  $\exp_q$  é diferenciável e  $\exp_q(0) = q$ .

Uma das propriedades mais importantes da aplicação exponencial é que existe uma vizinhança da origem do espaço tangente na qual a aplicação exponencial é um difeomorfismo sobre sua imagem e, basicamente, essa propriedade que nos possibilitará construir as coordenadas normais posteriormente. Assim, a próxima proposição nos garante essa propriedade.

**Proposição 2.29.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $q \in M$ . Então existe um  $\varepsilon > 0$  tal que  $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$  é um difeomorfismo de  $B_\varepsilon(0)$  sobre um aberto de  $M$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Proposição 2.9, p.73].  $\square$

Com os dois principais objetos definidos, as geodésicas e a aplicação exponencial, podemos estudar mais algumas propriedades relevantes destes objetos. A saber, a propriedade localmente minimizante das geodésicas e o fato, provado no Lema de Gauss posteriormente, que a aplicação exponencial é uma “isometria radial”.

**Definição 2.30.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e uma aplicação contínua  $c : [a, b] \rightarrow M$  do intervalo fechado  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  em  $M$ . Se existe uma partição  $a = t_0 < \dots < t_k = b$  de  $[a, b]$  tal que as restrições  $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$ ,  $i = 0, \dots, k-1$ , são diferenciáveis, então dizemos que  $c$  é uma **curva diferenciável por partes**. Além disso, dizemos que  $c$  liga os pontos  $c(a)$  e  $c(b)$ . Chamamos  $c(t_i)$  de vértice de  $c$ , e o ângulo formado por  $\lim_{t \rightarrow t_i^+} c'(t)$  com  $\lim_{t \rightarrow t_i^-} c'(t)$  é chamado de ângulo do vértice  $c(t_i)$ .

Precisaremos estender o conceito de transporte paralelo, dado pela Proposição 2.12, às curvas diferenciáveis por partes. Para fazer isso, considere  $V_0 \in T_{c(t)}M$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  e estenda-o para um campo paralelo  $V(t)$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ; tomando  $V(t_i)$  e  $V(t_{i+1})$  como novos valores iniciais, obteremos uma extensão de  $V(t)$  paralelamente ao intervalo  $[t_{i-1}, t_{i+2}]$ , e assim sucessivamente.

**Definição 2.31.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  um segmento de geodésica. Chamamos  $\gamma$  de minimizante se  $l(\gamma) \leq l(c)$ , onde  $l(\cdot)$  indica o comprimento da curva e  $c$  é uma curva diferenciável por partes qualquer ligando  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$ .*

Os conceitos que serão introduzidos a seguir tem como objetivo nos dar estrutura para provar o Lema de Gauss.

**Definição 2.32.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $A$  um conjunto conexo de  $\mathbb{R}^2$  com  $U \subset A \subset \text{cl}(U)$ ,  $U$  aberto em  $\mathbb{R}^2$  e tal que a fronteira  $\partial A$  de  $A$  seja uma curva diferenciável por partes com ângulos dos vértices distintos de  $\pi$ . Uma **superfície parametrizada** em  $M$  é uma aplicação diferenciável  $s : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ .*

**Observação 2.33.** *Nas condições da Definição 2.32, dizer que  $s$  é diferenciável em  $A$  equivale a dizer que existe um aberto  $V \supset A$  onde  $s$  se estende diferenciavelmente. Além disso, a condição sobre os ângulos dos vértices de  $A$  é necessária para que a diferencial de  $s$  não dependa da extensão considerada.*

Vamos agora adaptar algumas definições para o contexto de superfícies parametrizadas. Assim, considere  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $s : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  uma superfície parametrizada em  $M$ . Um campo de vetores  $v$  ao longo de  $s$  é uma aplicação que associa a cada  $q \in A$  um vetor  $V(q) \in T_{s(q)}M$ , que é diferenciável, isto é, se  $f$  é uma função diferenciável em  $M$ , então a aplicação  $q \mapsto V(q)f$  é diferenciável.

Sejam  $(u, v)$  coordenadas cartesianas em  $\mathbb{R}^2$ . A aplicação  $u \mapsto s(u, v_0)$ , onde  $v_0$  está fixado e  $u$  está em uma componente conexa de  $A \cap \{v = v_0\}$ , é uma curva em  $M$ , e  $ds \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)$ , que será denotado por  $\frac{\partial s}{\partial u}$ , é um campo de vetores ao longo desta curva.

Dessa maneira, temos  $\frac{\partial s}{\partial u}$  definido para todo  $(u, v) \in A$  e  $\frac{\partial s}{\partial u}$  é um campo de vetores ao longo de  $s$ . Define-se  $\frac{\partial s}{\partial v}$  analogamente.

Considere  $V$  um campo ao longo de  $s$ ,  $\frac{DV}{du}(u, v_0)$  é a derivada covariante ao longo da curva  $u \mapsto s(u, v_0)$  da restrição de  $V$  a esta curva. Isso define  $\frac{DV}{du}(u, v)$  para todo  $(u, v) \in A$ . Define-se  $\frac{DV}{dv}$  analogamente.

**Lema 2.34** (de simetria). *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão simétrica e  $s : A \rightarrow M$  uma superfície parametrizada então*

$$\frac{D}{dv} \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{D}{du} \frac{\partial s}{\partial v}.$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Lema 3.4, p.76-77].  $\square$

Com as estruturas definidas podemos apresentar o Lema de Gauss, o qual nos dá mais informações sobre a aplicação exponencial.

**Lema 2.35** (de Gauss). *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e considere  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$  tais que a aplicação exponencial  $\exp_p(v)$  esteja definida e  $w \in T_v(T_p M) \cong T_p M$  então*

$$\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle. \quad (9)$$

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Lema 3.5, p.77-79].  $\square$

Assim, podemos definir uma gama de conjuntos dados pela imagem da aplicação exponencial que serão úteis posteriormente.

**Definição 2.36.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $V$  uma vizinhança da origem em  $T_p M$  tal que a aplicação exponencial  $\exp_p$  seja um difeomorfismo em  $V$ . Chamamos  $\exp_p(V) = U$  de uma **vizinhança normal** de  $p$ .*

**Definição 2.37.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $V$  uma vizinhança da origem em  $T_p M$  tal que a aplicação exponencial  $\exp_p$  seja um difeomorfismo em  $V$ . Considere  $\varepsilon > 0$  tal que  $cl(B_\varepsilon(0)) \subset V$ . Chamamos  $\exp_p(B_\varepsilon(0)) = B_\varepsilon(p)$  de uma **bola normal (ou geodésica)** de centro  $p$  e raio  $\varepsilon$ .*

**Definição 2.38.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $B_\varepsilon(p)$  de uma bola normal de centro  $p$  e raio  $\varepsilon$ . Chamamos a fronteira de uma bola normal de **esfera normal (ou geodésica)** de centro  $p$  e raio  $\varepsilon$  e denotamos-a por  $S_\varepsilon(p)$ .*

**Definição 2.39.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $B_\varepsilon(p)$  de uma bola normal de centro  $p$  e raio  $\varepsilon$ . Chamamos as geodésicas em  $B_\varepsilon(p)$  que partem de  $p$  de **geodésicas radiais**.*

Pelo Lema de Gauss 2.35, as esferas normais são uma hipersuperfície (subvariedade de codimensão 1) em  $M$  ortogonais às geodésicas radiais.

O outro fato geométrico que queremos apresentar é a propriedade minimizante das geodésicas. Mostraremos, primeiramente, que localmente uma geodésica minimiza o comprimento de arco.

**Proposição 2.40.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $p \in M$  um ponto,  $U \subset M$  uma vizinhança normal de  $p$  e  $B \subset U$  uma bola normal de centro  $p$ . Considere  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  um segmento de geodésica com  $\gamma(0) = p$ . Se  $c : [0, 1] \rightarrow M$  é qualquer curva diferenciável por partes ligando  $\gamma(0)$  a  $\gamma(1)$  então  $l(\gamma) \leq l(c)$  e se a igualdade vale então  $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Proposição 3.6, p.79-80].  $\square$

**Observação 2.41.** *Note que a Proposição 2.40 não garante um resultado global, isto é, se considerarmos um segmento de geodésica suficientemente grande ele pode deixar de ser minimizante. Por exemplo, seja  $M = \mathbb{S}^2$  com a métrica induzida de  $\mathbb{R}^3$  e considere as geodésicas que partem de um ponto  $p$ , note que tais geodésicas deixam de ser minimizantes depois que passam pelo ponto antípoda de  $p$ .*

**Teorema 2.42.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana. Para cada  $p \in M$  existem uma vizinhança  $W$  de  $p$  e um número  $\delta > 0$ , tais que, para cada  $q \in W$*

$$\exp_q : B_\delta(0) \subset T_q M \rightarrow \exp_q(B_\delta(0))$$

*é um difeomorfismo e  $\exp_q(B_\delta(0)) \supset W$ , isto é,  $W$  é vizinhança normal de cada um de seus pontos.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Teorema 3.7, p.80-81].  $\square$

**Definição 2.43.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $p \in M$  um ponto e  $W$  uma vizinhança de  $p$ . Dizemos que  $W$  é uma **vizinhança totalmente normal** se  $W$  é vizinhança normal de cada um de seus pontos, isto é, para cada  $q \in W$  temos uma vizinhança  $V$  da origem em  $T_q M$  tal que*

$$\exp_q : V \rightarrow \exp_q(V)$$

*é um difeomorfismo e  $\exp_q(V) \supset W$ .*

Agora, de certo modo, apresentamos uma recíproca da proposição anterior que mostrava que geodésicas minimizam o comprimento de arco. Ou seja, o próximo corolário nos dá que se uma curva é minimizante do comprimento de arco então ela é uma geodésica.

**Corolário 2.44.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  uma curva diferenciável por partes, com parâmetro proporcional ao comprimento de arco. Se  $\gamma$  tem comprimento menor ou igual ao comprimento de qualquer outra curva diferenciável por partes ligando  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$  então  $\gamma$  é uma geodésica. Em particular,  $\gamma$  é uma geodésica.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Corolário 3.9, p.81-82].  $\square$

## 2.3 CURVATURAS

Nesta seção apresentaremos uma definição de curvatura (seccional) que, intuitivamente, mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser euclideana. Mas, antes disso, vamos começar definindo o tensor de curvatura que será relacionado com a curvatura seccional posteriormente.

**Definição 2.45.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana. O **tensor de curvatura** de  $M$  é a aplicação*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

*definida por*

$$R(X, Y)(Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

**Observação 2.46.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $R$  o tensor de curvatura de  $M$ . Denotaremos  $g(R(X, Y)W, Z)$  por  $(X, Y, W, Z)$ .*

**Proposição 2.47.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $R$  o tensor de curvatura de  $M$ . Considere  $f, g \in \mathcal{D}(M)$  e  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ . Valem as seguintes propriedades para  $R$ :*

1.  $R(fX + gY, Z) = fR(X, Z) + gR(Y, Z)$ .
2.  $R(X, fY + gZ) = fR(X, Y) + gR(X, Z)$ .
3.  $R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W$ .
4.  $R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z$ .
5.  $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$
6.  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$  (**Primeira identidade de Bianchi**).
7.  $(X, Y, Z, W) + (Y, Z, X, W) + (Z, X, Y, W) = 0$ .
8.  $(X, Y, Z, W) = -(Y, X, Z, W)$ .
9.  $(X, Y, Z, W) = -(X, Y, W, Z)$ .
10.  $(X, Y, Z, W) = (Z, W, X, Y)$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Proposição 2.2, p.100-101, Proposição 2.4, p.101 e Proposição 2.5, p. 102-103].  $\square$

Podemos obter a expressão em coordenadas para o tensor de curvatura. Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $R$  o tensor de curvatura de  $M$ . Considere  $p \in M$ , um ponto arbitrário, e  $(U, x)$  um sistema de coordenadas em torno do ponto  $p$ . Indicaremos  $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k + \nabla_{[X_i, X_j]} X_k \\
 &= \nabla_{X_j} (\Gamma_{ik}^l X_l) - \nabla_{X_i} (\Gamma_{jk}^l X_l) \\
 &= \partial_j \Gamma_{ik}^l X_l + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p X_p - \partial_i \Gamma_{jk}^l X_l - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p X_p \\
 &= (\partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ik}^q \Gamma_{jq}^l - \partial_i \Gamma_{jk}^l - \Gamma_{jk}^q \Gamma_{iq}^l) X_l \\
 &= R_{ijk}^l X_l,
 \end{aligned} \tag{10}$$

onde  $R_{ijk}^l = \Gamma_{ik}^q \Gamma_{jq}^l - \Gamma_{jk}^q \Gamma_{iq}^l + \partial_j \Gamma_{ik}^l - \partial_i \Gamma_{jk}^l$ .

Além disso, obtemos também que

$$\begin{aligned}
 (X_i, X_j, X_k, X_s) &= g(R(X_i, X_j)X_k, X_s) \\
 &= g(R_{ijk}^l X_l, X_s) \\
 &= R_{ijk}^l g_{ls} \\
 &= R_{ijks}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Uma curvatura que, intuitivamente, mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser euclideana é dada pela curvatura seccional. A definição da curvatura seccional está intimamente relacionada com o tensor de curvatura e é dada a seguir.

**Definição 2.48.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $R$  o tensor de curvatura de  $M$ . Considere  $p \in M$ , um ponto arbitrário,  $\sigma \subset T_p M$  um subespaço bidimensional do espaço tangente  $T_p M$  e sejam  $x, y \in \sigma$  dois vetores linearmente independentes. Definimos a **curvatura seccional**  $K(\sigma)$  como o número real*

$$K(\sigma) = K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}.$$

**Proposição 2.49.** *Nas condições da Definição 2.48 a curvatura seccional  $K(\sigma)$  não depende da escolha dos vetores  $x, y \in \sigma$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Proposição 3.1, p.105]. □

Segue de um fato puramente algébrico, Lema 2.50, que o conhecimento da curvatura seccional  $K(\sigma)$ , para todo  $\sigma$ , determina completamente a curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana  $(M, g)$ .

**Lema 2.50.** *Seja  $V$  um espaço vetorial tal que  $\dim(V) \geq 2$ , munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sejam  $R : V \times V \times V \rightarrow V$  e  $R' : V \times V \times V \rightarrow V$  aplicações tri-lineares tais que as condições (7), (8), (9) e (10) da Proposição 2.47 sejam satisfeitas para*

$$(x, y, z, t) = \langle R(x, y)z, t \rangle, \quad (x, y, z, t)' = \langle R'(x, y)z, t \rangle.$$

*Se  $x, y$  são dois vetores linearmente independentes, escrevamos,*

$$K(\sigma) = \frac{(x, y, x, y)}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}, \quad K'(\sigma) = \frac{(x, y, x, y)'}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

*onde  $\sigma$  é o subespaço bidimensional gerado por  $x$  e  $y$ . Se para todo  $\sigma \subset V$ ,  $K(\sigma) = K'(\sigma)$ , então  $R = R'$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Lema 3.3, p.105-106].  $\square$

A próxima proposição nos dá uma equivalência, com respeito ao tensor de curvatura, para variedades Riemannianas com curvatura seccional constante.

**Proposição 2.51.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional e  $R$  o tensor de curvatura de  $M$ . Considere  $p \in M$ , um ponto arbitrário, e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal de  $T_p M$ . Escreva  $R_{ijkl} = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle$ ,  $i, j, k, l = 1, \dots, n$ . Então  $K(\sigma) = K_0$  para todo  $\sigma \subset T_p M$ , se, e somente se,*

$$R_{ijkl} = K_0 (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).$$

*Demonstração.* Primeiramente, considere  $X, Y, Z \in T_p M$  e escreva-os na base dada, isto é,  $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,  $Y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$  e  $Z = \sum_{k=1}^n z_k e_k$ . Perceba que

$$\begin{aligned} |X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2 &= \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2 \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\rangle \left\langle \sum_{j=1}^n y_j e_j, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{j=1}^n y_j^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i y_j \delta_{ij})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{j=1}^n y_j^2 - \sum_{i=1}^n (x_i y_i)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i x_k \delta_{ik} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n y_j y_l \delta_{jl} - \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n (x_i y_i) (x_l y_l) \delta_{il} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i x_k \delta_{ik} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n y_j y_l \delta_{jl} - \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n x_i y_l \delta_{il} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_k y_j \delta_{jk} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n x_i x_k y_j y_l \delta_{ik} \delta_{jl} - \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_i x_k y_l y_j \delta_{il} \delta_{jk} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n x_i x_k y_j y_l (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \\
&= \sum_{i,j,k,l} x_i x_k y_j y_l (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}). \tag{12}
\end{aligned}$$

Agora, vamos demonstrar a proposição propriamente dita.

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $K(\sigma) = K_0$  para todo  $\sigma \subset T_p M$ . Definamos  $\bar{R} : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$  por:

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, e_l \rangle = K_0 \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Note que  $\bar{R}$  satisfaz as condições (7), (8), (9) e (10) da Proposição 2.47. Além disso, considere  $\{u, v\}$  vetores linearmente independentes arbitrários em  $\sigma$  e escreva-os na base dada, isto é,  $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$  e  $v = \sum_{j=1}^n v_j e_j$ , usando-se (12), obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{R}(\sigma) &= \frac{\langle \bar{R}(u, v)u, v \rangle}{|u|^2 |v|^2 - \langle u, v \rangle^2} \\
&= \frac{K_0 \sum_{i,j,k,l} u_i v_j u_k v_l (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk})}{\sum_{i,j,k,l} u_i u_k v_j v_l (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk})} \\
&= K_0 \frac{\sum_{i,j,k,l} u_i u_k v_j v_l (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk})}{\sum_{i,j,k,l} u_i u_k v_j v_l (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk})} \\
&= K_0.
\end{aligned}$$

Portanto,  $K(\sigma) = \bar{R}(\sigma)$  para todo  $\sigma \subset T_p M$ , pois  $\{u, v\}$  foram tomados arbitrários, e pelo Lema 2.50 temos que  $R = \bar{R}$ . Disto segue-se que

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} &= \bar{R}_{ijkl} \\
&= \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle
\end{aligned}$$

$$= K_0 (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}),$$

como desejado.

( $\Leftarrow$ ) Considere  $\sigma \subset T_p M$  arbitrário e tome  $\{X, Y\}$  vetores linearmente independentes arbitrários em  $\sigma$ . Note que, pela hipótese e por (12),

$$\begin{aligned} K(\sigma) &= \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= \frac{\left\langle R \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 y_j^2 \langle R(e_i, e_j) e_i, e_j \rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 y_j^2 R_{ijij}}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 y_j^2 K_0 (\delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji})}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= K_0 \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 y_j^2 (1 - \delta_{ij})}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= K_0 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{j=1}^n y_j^2 - \sum_{i=1}^n (x_i y_i)^2}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= K_0 \frac{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= K_0, \end{aligned}$$

como  $\sigma \subset T_p M$  foi tomado arbitrário, segue o requerido.  $\square$

Algumas combinações da curvatura seccional aparecem com tanta frequência que daremos nomes a elas. São elas a curvatura de Ricci e a curvatura escalar, definidas a seguir.

**Definição 2.52.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $R$  o tensor de curvatura de  $M$ . Considere  $p \in M$  um ponto arbitrário,  $X \in T_p M$  um vetor unitário e  $\{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}\}$  uma base ortonormal de  $X^\perp \subset T_p M$ . As médias:

$$Ric(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(X, X_i)X, X_i \rangle$$

e, tomando-se  $X_n = X$ ,

$$S(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Ric(X_j) = \frac{1}{n.(n-1)} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \langle R(X_j, X_i)X_j, X_i \rangle,$$

são chamados, respectivamente, de **curvatura de Ricci** na direção de  $X$  e de **curvatura escalar** em  $p$ .

## 2.4 COORDENADAS NORMAIS

Nessa seção vamos introduzir as cartas coordenadas normais e as cartas coordenadas de Fermi. Tais cartas coordenadas facilitam o entendimento das geodésicas em uma vizinhança de um ponto ou de uma subvariedade.

Considere  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional e  $p \in M$  um ponto arbitrário. Queremos construir cartas coordenadas ao redor de  $p \in M$ . Para isso tomemos  $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^n$  uma base arbitrária de  $T_p M$  e note que podemos definir um isomorfismo entre bases  $B : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$  dado por

$$B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{e}_i. \quad (13)$$

**Definição 2.53.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $p \in M$  um ponto arbitrário. Considere  $U = \exp_p(V)$  uma vizinhança normal de  $p$  e defina a aplicação  $\phi = B^{-1} \circ (\exp|_V)^{-1} : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{B^{-1}} & \mathbb{R}^n \\ (\exp_p|_V)^{-1} \uparrow & \nearrow \phi & \\ U \subset M & & \end{array}$$

onde  $B$  é o isomorfismo dado em (13). Chamamos o par  $(U, \phi)$  de **carta coordenada normal em torno de  $p$** .

Nas condições da Definição 2.53 temos que para um ponto  $q \in U$  arbitrário  $\phi(q) = (x_1(q), \dots, x_n(q))$ , onde  $x_i : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$  são aplicações. Como  $U$  é uma vizinhança normal de  $p$  temos que  $\exp_p : V \rightarrow U$  é um difeomorfismo, em particular, uma bijeção. Assim, tome  $v \in V \subset T_p M$  tal que  $\exp_p(v) = q$  e escreva  $v = \sum_{i=1}^n v_i \bar{e}_i$ . Logo,

$$\begin{aligned}\phi(q) &= \phi(\exp_p(v)) \\ &= B^{-1} \circ (\exp_p|_V)^{-1} \circ \exp_p(v) \\ &= B^{-1}(v) \\ &= B^{-1} \left( \sum_{i=1}^n v_i t_i \right) \\ &= (v_1, \dots, v_n).\end{aligned}$$

Disto, segue-se que,

$$x_j \left( \exp_p \left( \sum_{i=1}^n v_i t_i \right) \right) = v_j. \quad (14)$$

Com isso, na próxima proposição apresentaremos algumas das propriedades pelas quais mostramos a conveniência de escolhermos trabalhar com cartas coordenadas normais.

**Proposição 2.54.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $p \in M$  um ponto arbitrário e  $(U, \{x_i\})$  uma carta coordenada normal arbitrária centrada em  $p \in M$ . Valem que:*

1. *As coordenadas de  $p$  são  $(0, \dots, 0)$ .*
2. *As componentes da métrica em  $p$  são  $g_{ij} = \delta_{ij}$ .*
3. *Para todo  $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \in T_p M$ , a geodésica  $\gamma(t)$ , com  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = v$ , é representada em cartas normais pela reta*

$$\gamma(t) = (tv_1, \dots, tv_n). \quad (15)$$

*sempre que  $t$  estiver em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  que contém a origem  $0 \in \mathbb{R}$ , tal que  $\gamma(I) \subset U$ .*

4. *Os símbolos de Christoffel nessas cartas zeram em  $p$ .*

5. Todas as derivadas parciais de  $g_{ij}$  nessas cartas se anulam em  $p$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [Lee18, Proposição 5.24, p.132-133].  $\square$

As cartas coordenadas de Fermi são uma generalização natural das cartas coordenadas normais quando substituímos um ponto na variedade por uma subvariedade. Assim, a primeira coisa na qual esbarramos para fazer tal generalização é a aplicação exponencial da variedade. Para contornar esse problema usamos a aplicação exponencial normal, definida a seguir.

**Definição 2.55.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional,  $\Gamma \subset M$  uma subvariedade mergulhada e  $\pi : N\Gamma \rightarrow \Gamma$  o fibrado normal de  $\Gamma$  em  $M$ . Considere  $U \subset TM$  o domínio da aplicação exponencial dado na Definição 2.27. Chamemos  $U_\Gamma = U \cap N\Gamma \subset TM$ . Chamamos a aplicação  $E : U_\Gamma \rightarrow M$  dada pela restrição  $\exp|_{U_\Gamma} : U_\Gamma \rightarrow M$  de **aplicação exponencial normal de  $\Gamma$  em  $M$** .*

Podemos provar que aplicação exponencial normal é diferenciável e que restrita a uma vizinhança adequada é um difeomorfismo.

**Observação 2.56.** *Note que a aplicação exponencial normal dada pela Definição 2.55 é diferenciável, pois é uma restrição da aplicação exponencial  $\exp$ , que é diferenciável, ao aberto  $U_\Gamma$  do fibrado.*

**Proposição 2.57.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional,  $\Gamma \subset M$  uma subvariedade mergulhada. Então existe uma vizinhança da seção nula do fibrado normal tal que a aplicação exponencial normal  $E$  é um difeomorfismo sobre sua imagem.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [Lee18, Teorema 5.25, p. 133-135].  $\square$

**Definição 2.58.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $\Gamma \subset M$  uma subvariedade mergulhada de  $M$  e  $V$  uma vizinhança da seção nula em  $N\Gamma$  tal que a aplicação exponencial  $E$  seja um difeomorfismo em  $V$ . Chamamos  $E(V)$  de **vizinhança normal de  $\Gamma$  em  $M$** .*

Assim, com o problema da aplicação exponencial contornado através da aplicação exponencial normal, podemos definir as cartas coordenadas de Fermi.

**Definição 2.59.** *Sejam  $\Gamma \subset M$  uma subvariedade mergulhada  $k$ -dimensional de uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional  $(M, g)$  e  $p \in \Gamma$  arbitrário. Sejam  $U = E(V)$  uma vizinhança*

normal de  $\Gamma$  em  $M$ ,  $\xi = (y_1, \dots, y_k)$  um sistema de coordenadas arbitrário em  $p$  e  $E_{k+1}, \dots, E_n$  seções ortonormais de  $N\Gamma$ . Para  $(q, v) \in V$ , com  $v = \sum_{i=k+1}^n v_i E_i|_q$ , definimos a aplicação  $\phi = (x_1, \dots, x_n)$ , onde

$$\begin{cases} x_j \left( E \left( q, \sum_{i=k+1}^n v_i E_i|_q \right) \right) = y_j(q), & j = 1, \dots, k \\ x_j \left( E \left( q, \sum_{i=k+1}^n v_i E_i|_q \right) \right) = v_j, & j = k+1, \dots, n. \end{cases} \quad (16)$$

Chamamos o par  $(U, \phi)$  de **carta coordenada de Fermi** em torno de  $p$ .

Note que (16) define, de fato, cartas coordenadas em  $p$ , pois a aplicação exponencial normal é um difeomorfismo em vizinhanças normais.

A seguir faremos dois lemas técnicos, nos quais estudaremos algumas propriedades das cartas coordenadas de Fermi.

**Lema 2.60.** *Sejam  $\Gamma \subset M$  uma subvariedade mergulhada  $k$ -dimensional de uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional  $(M, g)$  e  $p \in \Gamma$  um ponto arbitrário. Considere  $(U, \{x_i\}_{i=1}^n)$  uma carta coordenada de Fermi em torno de  $p$  então*

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} \right|_{\Gamma}, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_{\Gamma}$$

são ortonormais.

*Demonstração.* Seja  $q \in U$  um ponto arbitrário diferente de  $p$ . Temos que para  $k+1 \leq i \leq n$  a curva integral de  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  iniciando-se em  $q$  é a geodésica  $\gamma$  definida por  $\gamma(t) = E(q, t E_i|_q)$ . Então

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_q = \gamma'(0) = E_i|_q.$$

Como  $E_i|_q$  são ortonormais para  $k+1 \leq i \leq n$ , segue-se o desejado.  $\square$

**Lema 2.61.** *Sejam  $\Gamma \subset M$  uma subvariedade mergulhada  $k$ -dimensional de uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional  $(M, g)$ . Considere a geodésica  $\alpha$  normal a  $\Gamma$  com  $\alpha(0) = p \in \Gamma$  e  $\alpha'(0) = v$ . Então existem cartas coordenadas de Fermi  $(U, \{x_i\}_{i=1}^n)$  tal que para  $t > 0$  suficientemente pequeno temos*

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} \right|_{\alpha(t)} = \alpha'(t) \quad (17)$$

e

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \in T_p \Gamma, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \in T_p \Gamma^\perp \quad (18)$$

para  $1 \leq i \leq k$  e  $k+1 \leq j \leq n$ . Além disso,

$$(x_i \circ \alpha)(t) = t\delta_{ik+1} \quad (19)$$

para  $1 \leq i \leq n$ .

*Demonstração.* Consideremos um referencial ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  em  $T_p M$  da seguinte maneira:  $\{e_1, \dots, e_k\}$  formam uma base para  $T_p \Gamma$  e  $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$  são as seções ortonormais  $E_{k+1}, \dots, E_n$  de  $N\Gamma$  em uma vizinhança de  $p$ , com  $E_{k+1} = \alpha'(0)$ . Tomemos  $(y_1, \dots, y_k)$  um sistema de coordenadas em  $\Gamma$  tal que  $\frac{\partial}{\partial y_i} = e_i, i = 1, \dots, k$ .

Seja  $(x_1, \dots, x_n)$  cartas coordenadas de Fermi de  $\Gamma$  em torno de  $p$  como na Definição 2.59.

Note que as condições em (18) são satisfeitas por construção. Além disso, como as cartas coordenadas de Fermi são dadas pela aplicação exponencial normal, temos que a curva integral de  $\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}$  iniciando-se em  $p$  é uma geodésica. Por outro lado,  $\frac{\partial}{\partial x_{k+1}} = E_{k+1}$  e, por construção,  $\alpha'(0) = E_{k+1}$ , donde, pela unicidade das geodésicas, segue (17).

Por outro lado, em relação às cartas  $\{x_i\}$ , temos que

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n (x_i \circ \alpha)'(t) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\alpha(t)}. \quad (20)$$

Aplicamos (17) em (20) e obtemos

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} \right|_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^n (x_i \circ \alpha)'(t) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\alpha(t)}.$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} (x_i \circ \alpha)'(t) = 0, & i \neq k+1 \\ (x_i \circ \alpha)'(t) = 1, & i = k+1. \end{cases}$$

Donde,

$$(x_i \circ \alpha)(t) = t\delta_{ik+1}.$$

Portanto, temos (19) e o resultado segue.  $\square$

## 2.5 CAMPOS DE FERMI

Com as cartas coordenadas de Fermi definidas, podemos construir outras estruturas para provarmos o Lema de Gauss generalizado posteriormente. Comecemos com os campos de Fermi.

**Definição 2.62.** Sejam  $\Gamma \subset M$  uma subvariedade mergulhada  $k$ -dimensional de uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional  $(M, g)$  e  $p \in \Gamma$  um ponto arbitrário. Considere  $U \subset U_\Gamma$ , onde  $U_\Gamma$  é o domínio da aplicação exponencial normal na Definição 2.55. Tome  $(x_1, \dots, x_n)$  cartas coordenadas de Fermi centradas em  $p$ . Dizemos que  $A \in \mathfrak{X}(U)$  é um **campo de Fermi tangencial** se

$$A = \sum_{i=1}^k c_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde  $c_i, i = 1, \dots, k$ , são constantes. Analogamente, dizemos que  $X \in \mathfrak{X}(U)$  é um **campo de Fermi normal** se

$$X = \sum_{j=k+1}^n d_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

onde  $d_j, j = k+1, \dots, n$ , são constantes.

Para  $p \in \Gamma$  denotaremos por  $\mathfrak{X}(\Gamma, p)^T$  e  $\mathfrak{X}(\Gamma, p)^\perp$  os espaços dos campos de Fermi tangenciais e normais, respectivamente. Note que  $\mathfrak{X}(\Gamma, p)^T$  e  $\mathfrak{X}(\Gamma, p)^\perp$  são espaços vetoriais de dimensão  $k$  e  $n - k$ , respectivamente. Além disso, considere

$$\mathfrak{X}(\Gamma, p) = \mathfrak{X}(\Gamma, p)^T \oplus \mathfrak{X}(\Gamma, p)^\perp$$

o espaço dos campos de Fermi em  $p$ . Quando  $\Gamma$  é um ponto, os campos de Fermi normais coincidem com os campos coordenados das cartas normais. Note que se  $E_{k+1}, \dots, E_n$  são rotacionados por uma matriz ortogonal constante então o espaço do campos de Fermi permanece o mesmo.

Uma das conveniências de usarmos coordenadas de Fermi é a simplificação que ocorre com algumas estruturas, como por exemplo a função distância a uma subvariedade.

**Definição 2.63.** Sejam  $\Gamma \subset M$  uma subvariedade mergulhada  $k$ -dimensional de uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional  $(M, g)$  e  $p \in \Gamma$  um ponto arbitrário. Considere  $(x_1, \dots, x_n)$  cartas coordenadas de Fermi centradas em  $p$ . Para  $\sigma > 0$  tome

$$\sigma^2 = \sum_{i=k+1}^n x_i^2 \quad \text{e} \quad N = \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (21)$$

Vamos mostrar que  $\sigma$  e  $N$  estão bem definidos, isto é, são independentes da escolha das cartas.

**Lema 2.64.** Sejam  $\Gamma \subset M$  uma subvariedade mergulhada  $k$ -dimensional de uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional  $(M, g)$  e  $p \in \Gamma$  um ponto arbitrário. Então as definições de  $\sigma$  e  $N$  dadas na Definição 2.63 são independentes da escolha das cartas coordenadas de Fermi em  $p$ .

*Demonastração.* Considere  $(x_1, \dots, x_n)$  e  $(y_1, \dots, y_n)$  cartas coordenadas de Fermi centradas em  $p$  e  $\{E_{k+1}, \dots, E_n\}$  e  $\{F_{k+1}, \dots, F_n\}$  as seções ortogonais de  $N\Gamma$  que dão origem a tais cartas. Podemos escrever

$$F_i = \sum_{j=k+1}^n a_{ji} E_j,$$

onde  $(a_{ji})_{j,i}$  é uma matriz de funções no grupo ortogonal  $\mathbb{O}(n-k)$  com cada  $a_{ji} \in \mathcal{D}(\Gamma)$ . Então

$$\begin{aligned} x_i \left( E \left( \sum_{l=k+1}^n r_l F_l \right) \right) &= x_i \left( E \left( \sum_{l=k+1}^n r_l \left( \sum_{j=k+1}^n a_{jl} E_j \right) \right) \right) \\ &= x_i \left( E \left( \sum_{j=k+1}^n \left( \sum_{l=k+1}^n r_l a_{jl} \right) E_j \right) \right) \\ &= \sum_{l=k+1}^n r_l a_{il} \\ &= \sum_{l=k+1}^n a_{il} y_l \left( E \left( \sum_{j=k+1}^n r_j F_j \right) \right). \end{aligned} \tag{22}$$

De (22) segue-se que  $x_i = \sum_{l=k+1}^n a_{il} y_l$ . Então

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+1}^n x_i^2 &= \sum_{i=k+1}^n \left( \sum_{l=k+1}^n a_{il} y_l \right) \left( \sum_{j=k+1}^n a_{ij} y_j \right) \\ &= \sum_{i=k+1}^n \sum_{l=k+1}^n \sum_{j=k+1}^n a_{il} a_{ij} y_l y_j \\ &= \sum_{l=k+1}^n \sum_{j=k+1}^n \left( \sum_{i=k+1}^n a_{il} a_{ij} \right) y_l y_j \\ &= \sum_{l=k+1}^n \sum_{j=k+1}^n \delta_{lj} y_l y_j \\ &= \sum_{i=k+1}^n y_i^2. \end{aligned}$$

Além disso,  $\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = 0$  para  $j = 1, \dots, k$ . Logo,

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=k+1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{23}$$

Por outro lado, tomando-se  $(b_{ij}) = (a_{ij})^{-1}$ , temos

$$x_j = \sum_{l=k+1}^n a_{jl} y_l$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k+1}^n b_{ij} x_j &= \sum_{j=k+1}^n b_{ij} \sum_{l=k+1}^n a_{jl} y_l \\
&= \sum_{j=k+1}^n \sum_{l=k+1}^n b_{ij} a_{jl} y_l \\
&= \sum_{j=k+1}^n \sum_{l=k+1}^n (a_{ij})^{-1} a_{jl} y_l \\
&= \sum_{l=k+1}^n \delta_{il} y_l \\
&= y_i.
\end{aligned} \tag{24}$$

De (23) e (24) obtemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k+1}^n y_i \frac{\partial}{\partial y_i} &= \sum_{i=k+1}^n \left( \sum_{j=k+1}^n b_{ij} x_j \right) \left( \sum_{l=k+1}^n a_{li} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \\
&= \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=k+1}^n \sum_{l=k+1}^n b_{ij} x_j a_{li} \frac{\partial}{\partial x_l} \\
&= \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=k+1}^n \sum_{l=k+1}^n x_j (a_{ij})^{-1} a_{li} \frac{\partial}{\partial x_l} \\
&= \sum_{j=k+1}^n \sum_{l=k+1}^n x_j \left( \sum_{i=k+1}^n a_{li} (a_{ij})^{-1} \right) \frac{\partial}{\partial x_l} \\
&= \sum_{j=k+1}^n \sum_{l=k+1}^n x_j \delta_{lj} \frac{\partial}{\partial x_l} \\
&= \sum_{i=k+1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

Disto segue o requerido.  $\square$

O próximo lema nos dá a expressão em cartas coordenadas de Fermi para a função distância a uma subvariedade e caracteriza o normal para fora de uma subvariedade em cartas coordenadas de Fermi.

**Lema 2.65.** *Sejam  $\Gamma \subset M$  uma subvariedade mergulhada  $k$ -dimensional de uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional  $(M, g)$  e  $p \in M$  um ponto arbitrário tal que existe uma geodésica minimizante  $\gamma$  de  $\Gamma$  a  $p$ , chegando em  $\Gamma$  ortogonalmente. Então*

$$\sigma(p) = d_\Gamma(p) \quad \text{e} \quad N|_{\gamma(s)} = \gamma'(s).$$

*Demonação.* Primeiramente, tomemos  $\gamma(0) = q \in \Gamma$ . Tome  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $\gamma(b) = p$ . Pelo Lema 2.61, existem cartas coordenadas de Fermi  $(x_1, \dots, x_n)$  centradas em  $p$  tal que  $x_i(\gamma(t)) = t\delta_{ik+1}$ . Consequentemente,

$$\sigma^2(p) = \sum_{i=k+1}^n x_i^2(p) = \sum_{i=k+1}^n x_i^2(\gamma(b)) = \sum_{i=k+1}^n b^2 \delta_{ik+1} = b^2 = d_\Gamma^2(p), \quad (25)$$

por (25) implicamos que  $\sigma(p) = d_\Gamma(p)$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} N|_{\gamma(s)} &= \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma}(\gamma(s)) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(s)} \\ &= \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i(\gamma(s))}{\sigma(\gamma(s))} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(s)} \\ &= \sum_{i=k+1}^n \frac{s\delta_{ik+1}}{d_\Gamma(\gamma(s))} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(s)} \\ &= \sum_{i=k+1}^n \delta_{ik+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(s)} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} \Big|_{\gamma(s)} \\ &= \gamma'(s). \end{aligned}$$

Donde temos o requerido. □

O próximo lema nos apresenta algumas propriedades do campo  $N$  e sua relação com campos de Fermi tangenciais e normais. Além disso, relaciona todos esses campos com a função distância  $\sigma$ .

**Lema 2.66.** *Sejam  $\Gamma \subset M$  uma subvariedade mergulhada  $k$ -dimensional de uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional  $(M, g)$  e  $p \in \Gamma$  um ponto arbitrário. Considere  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Gamma, p)^\perp$  e  $A, B \in \mathfrak{X}(\Gamma, p)^T$ . Então*

$$\nabla_N N = 0, \quad (26)$$

$$|N| = 1, \quad (27)$$

$$N(\sigma) = 1, \quad (28)$$

$$A(\sigma) = 0, \quad (29)$$

$$[X, Y] = [A, B] = [X, A] = [N, A] = 0, \quad (30)$$

$$[N, X] = -\frac{1}{\sigma}X + \frac{1}{\sigma}X(\sigma)N, \quad (31)$$

$$[N, \sigma X] = X(\sigma)N, \quad (32)$$

$$\nabla_N \nabla_N Z + R(N, Z)N = 0, \quad \text{onde } Z = A + \sigma X. \quad (33)$$

*Demonação.* Primeiramente, como  $N|_{\gamma(s)} = \gamma'(s)$ , pelo Lema 2.65, temos que  $\nabla_N N = \nabla_{\gamma'(s)} \gamma'(s) = 0$  e  $|N| = |\gamma'(s)| = 1$ . Donde seguem os itens (26) e (27).

Para o item (28) notemos primeiramente que

$$N(\sigma^2) = \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma^2) = 2\sigma \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma) = 2\sigma N(\sigma). \quad (34)$$

De (34) temos que

$$\begin{aligned} N(\sigma) &= \frac{1}{2\sigma} N(\sigma^2) \\ &= \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma^2) \\ &= \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=k+1}^n x_j^2 \right) \\ &= \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \sum_{j=k+1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (x_j^2) \\ &= \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial x_j^2}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} 2x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} 2x_j \delta_{ij} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=k+1}^n x_i x_j \delta_{ij} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=k+1}^n x_i^2 = 1. \end{aligned}$$

Para o item (29) denotemos  $A \in \mathfrak{X}(\Gamma, p)$  por  $A = \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , onde  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ . Assim,

$$A(\sigma^2) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma^2) = 2\sigma \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma) = 2\sigma A(\sigma). \quad (35)$$

Por (35) temos que

$$\begin{aligned} A(\sigma) &= \frac{1}{2\sigma} A(\sigma^2) = \frac{1}{2\sigma} A \left( \sum_{j=k+1}^n x_j^2 \right) \\ &= \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=k+1}^n x_j^2 \right) \\ &= \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} (x_j^2) \\ &= \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^n \alpha_i \frac{\partial x_j^2}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^n \alpha_i 2x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^n \alpha_i 2x_j \delta_{ij} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para o item (30) denotemos  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Gamma, p)^\perp$  por  $X = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $Y = \sum_{i=k+1}^n \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , também denotaremos  $A, B \in \mathfrak{X}(\Gamma, p)^T$  por  $A = \sum_{i=1}^k a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $B = \sum_{i=1}^k b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Logo,

$$[X, Y] = \left[ \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=k+1}^n \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=k+1}^n \alpha_i \beta_j \left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0, \quad (36)$$

$$[A, B] = \left[ \sum_{i=1}^k a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^k b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_i b_j \left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0, \quad (37)$$

$$[X, A] = \left[ \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^k a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=1}^k \alpha_i a_j \left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0, \quad (38)$$

$$[N, A](f) = N(A(f)) - A(N(f))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^k a_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) - \sum_{j=1}^k a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\
&= \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \sum_{j=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) - \sum_{j=1}^k a_j \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\
&= \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + a_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \sum_{j=1}^k a_j \sum_{i=k+1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{x_i}{\sigma} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) \\
&= \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \sum_{j=1}^k a_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{j=1}^k a_j \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \sum_{j=1}^k a_j \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{x_i}{\sigma} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=1}^k a_j \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{j=1}^k \sum_{i=k+1}^n a_j \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{j=1}^k \sum_{i=k+1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{x_i}{\sigma} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= - \sum_{j=1}^k \sum_{i=k+1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{x_i}{\sigma} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= - \sum_{j=1}^k \sum_{i=k+1}^n a_j \frac{\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \sigma - x_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_j}}{\sigma^2} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= - \sum_{j=1}^k \sum_{i=k+1}^n a_j \frac{1}{\sigma} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k \sum_{i=k+1}^n a_j \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= - \sum_{j=1}^k \sum_{i=k+1}^n a_j \frac{1}{\sigma} \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k \sum_{i=k+1}^n a_j \frac{x_i}{\sigma} \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma^2}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= \sum_{j=1}^k \sum_{i=k+1}^n a_j \frac{x_i}{\sigma} \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{l=k+1}^n x_l^2 \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= \sum_{j=1}^k \sum_{i=k+1}^n \sum_{l=k+1}^n a_j \frac{x_i}{\sigma} \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( x_l^2 \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= \sum_{j=1}^k \sum_{i=k+1}^n \sum_{l=k+1}^n a_j \frac{x_i}{\sigma} \frac{1}{2\sigma} 2x_l \frac{\partial x_l}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= \sum_{j=1}^k \sum_{i=k+1}^n \sum_{l=k+1}^n a_j \frac{x_i x_l}{\sigma^2} \delta_{lj} \frac{\partial}{\partial x_i} (f) \\
&= 0(f) \tag{39}
\end{aligned}$$

Por (39) temos que  $[N, A] = 0$  e disto segue-se, juntamente com (36), (37) e (38), que

$$[X, Y] = [A, B] = [X, A] = [N, A] = 0.$$

Para o item (31) denotemos  $X \in \mathfrak{X}(\Gamma, p)^\perp$  por  $X = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e notemos que

$$X(\sigma^2) = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma^2) = 2\sigma \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma) = 2\sigma X(\sigma). \quad (40)$$

De (40) obtemos que

$$\begin{aligned} X(\sigma) &= \frac{1}{2\sigma} X(\sigma^2) \\ &= \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{l=k+1}^n x_l^2 \right) \\ &= \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=k+1}^n \sum_{l=k+1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} (x_l^2) \\ &= \frac{1}{2\sigma} \sum_{i=k+1}^n \sum_{l=k+1}^n \alpha_i 2x_l \frac{\partial x_l}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=k+1}^n \sum_{l=k+1}^n \alpha_i x_l \delta_{li} \end{aligned} \quad (41)$$

Assim, usando (41), temos que

$$\begin{aligned} [N, X](f) &= N(X(f)) - X(N(f)) \\ &= \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) - \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \sum_{j=k+1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) - \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \sum_{j=k+1}^n \left( \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \alpha_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \sum_{i=k+1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{x_i}{\sigma} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{x_i}{\sigma} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=k+1}^n \alpha_j \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=k+1}^n \alpha_j \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=k+1}^n \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{x_i}{\sigma} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= - \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=k+1}^n \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{x_i}{\sigma} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= - \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=k+1}^n \alpha_j \frac{\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} x_i}{\sigma^2} \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{\sigma} \alpha_j \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=k+1}^n \alpha_j \frac{x_i}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= - \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{\sigma} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} (f) + \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=k+1}^n \alpha_j \frac{x_i}{\sigma^2} \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma^2}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= - \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{\sigma} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} (f) + \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=k+1}^n \alpha_j \frac{x_i}{\sigma^2} \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{l=k+1}^n x_l^2 \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= - \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{\sigma} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} (f) + \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=k+1}^n \sum_{l=k+1}^n \alpha_j \frac{x_i}{\sigma^2} \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_l^2) \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} (f) + \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=k+1}^n \sum_{l=k+1}^n \alpha_j \frac{x_i}{\sigma^2} \frac{1}{2\sigma} 2x_l \frac{\partial x_l}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} (f) + \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=k+1}^n \sum_{l=k+1}^n \alpha_j \frac{x_i}{\sigma^2} \frac{1}{2\sigma} 2x_l \delta_{lj} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} (f) + \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sigma} \sum_{j=k+1}^n \sum_{l=k+1}^n \alpha_j x_l \delta_{lj} \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= - \frac{1}{\sigma} X(f) + \frac{1}{\sigma} X(\sigma) N(f) \\
&= \left( - \frac{1}{\sigma} X + \frac{1}{\sigma} X(\sigma) N \right) (f).
\end{aligned} \tag{42}$$

Por (42) temos que  $[N, X] = -\frac{1}{\sigma} X + \frac{1}{\sigma} X(\sigma) N$ .

Para o item (32) usaremos os itens (28) e (31) como segue

$$\begin{aligned}
[N, \sigma X](f) &= N(\sigma) X(f) + \sigma [N, X] \\
&= 1 X(f) + \sigma \left( - \frac{1}{\sigma} X(f) + \frac{1}{\sigma} X(\sigma) N(f) \right) \\
&= X(f) - X(f) + X(\sigma) N(f) \\
&= X(\sigma) N(f).
\end{aligned} \tag{43}$$

Por (43) temos que  $[N, \sigma X] = X(\sigma) N$ .

Para o item (33) note primeiramente que, pelo item (32), temos

$$\begin{aligned}
[N, \sigma X] &= \nabla_N(\sigma X) - \nabla_{\sigma X} N \\
\nabla_N[N, \sigma X] &= \nabla_N \nabla_N(\sigma X) - \nabla_N \nabla_{\sigma X} N \\
\nabla_N \nabla_N(\sigma X) &= \nabla_N[N, \sigma X] + \nabla_N \nabla_{\sigma X} N \\
&= \nabla_N(X(\sigma) N) + \nabla_N \nabla_{\sigma X} N.
\end{aligned} \tag{44}$$

Por outro lado, temos também que, pelo item (26),

$$\begin{aligned} R(N, \sigma X)N &= \nabla_{\sigma X} \nabla_N N - \nabla_N \nabla_{\sigma X} N + \nabla_{[N, \sigma X]} N \\ \nabla_N \nabla_{\sigma X} N &= -R(N, \sigma X)N + \nabla_{[N, \sigma X]} N. \end{aligned} \quad (45)$$

Juntando (44) e (45) e usando os itens (26) e (32) obtemos que

$$\begin{aligned} \nabla_N \nabla_N (\sigma X) &= \nabla_N (X(\sigma)N) - R(N, \sigma X)N + \nabla_{[N, \sigma X]} N \\ &= \nabla_N (X(\sigma)N) - R(N, \sigma X)N + \nabla_{X(\sigma)N} N \\ &= N(X(\sigma))N + X(\sigma) \nabla_N N - R(N, \sigma X)N - X(\sigma) + \nabla_N N \\ &= N(X(\sigma))N - R(N, \sigma X)N. \end{aligned} \quad (46)$$

Por outro lado, usando o item (28), obtemos que

$$\begin{aligned} [N, X](\sigma)N &= (N(X(\sigma)) - X(N(\sigma))) N \\ &= (N(X(\sigma)) - X(1)) N \\ &= N(X(\sigma))N. \end{aligned} \quad (47)$$

Juntando (46) e (47) e usando os itens (28) e (31) obtemos que

$$\begin{aligned} \nabla_N \nabla_N (\sigma X) &= [N, X](\sigma)N - R(N, \sigma X)N \\ &= \left( -\frac{1}{\sigma} X + \frac{1}{\sigma} X(\sigma)N \right) (\sigma)N - R(N, \sigma X)N \\ &= -\frac{1}{\sigma} X(\sigma)N + \frac{1}{\sigma} X(\sigma)N(\sigma)N - R(N, \sigma X)N \\ &= -\frac{1}{\sigma} X(\sigma)N + \frac{1}{\sigma} X(\sigma)N - R(N, \sigma X)N \\ &= -R(N, \sigma X)N. \end{aligned} \quad (48)$$

Além disso, temos pelo item (30) que

$$\begin{aligned} 0 &= [N, A] = \nabla_N A - \nabla_A N \\ \nabla_N \nabla_N A &= \nabla_N \nabla_A N. \end{aligned} \quad (49)$$

Por outro lado, usando os itens (26) e (30), temos que

$$\begin{aligned} R(N, A)N &= \nabla_A \nabla_N N - \nabla_N \nabla_A N + \nabla_{[N, A]} N \\ &= -\nabla_N \nabla_A N. \end{aligned} \quad (50)$$

Juntando (49) e (50) obtemos que

$$\nabla_N \nabla_N A = -R(N, A)N. \quad (51)$$

Por fim, usando (48) e (51), temos

$$\begin{aligned} \nabla_N \nabla_N Z &= \nabla_N \nabla_N (A - \sigma X) \\ &= \nabla_N \nabla_N A + \nabla_N \nabla_N (\sigma X) \\ &= -R(N, A)N - R(N, \sigma X)N \\ &= -R(N, A + \sigma X)N \\ &= -R(N, Z)N \\ \nabla_N \nabla_N Z + R(N, Z)N &= 0. \end{aligned}$$

Donde temos o requerido.  $\square$

## 2.6 LEMA DE GAUSS GENERALIZADO

Nesta seção apresentamos o lema de Gauss generalizado que mostra que o normal para fora de uma subvariedade é dado pelo gradiente da função distância. Mostramos também que o lema de Gauss generalizado implica o lema de Gauss.

**Lema 2.67** (de Gauss generalizado). *Sejam  $\Gamma \subset M$  uma subvariedade mergulhada  $k$ -dimensional de uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional  $(M, g)$  e  $p \in \Gamma$ . Então temos que  $N = \text{grad}(\sigma)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $X \in \mathfrak{X}(\Gamma, p)^\perp$ ,  $A \in \mathfrak{X}(\Gamma, p)^T$  e tome  $Z = A + \sigma X$ . Denotaremos  $X = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $A = \sum_{i=1}^k a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Note que

$$\begin{aligned} N^2 \langle Z, N \rangle &= N(N \langle Z, N \rangle) \\ &= N \langle \nabla_N Z, N \rangle + N \langle Z, \nabla_N N \rangle \\ &= \langle \nabla_N \nabla_N Z, N \rangle + \langle \nabla_N Z, \nabla_N N \rangle \\ &= \langle -R(N, Z)N, N \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
N^2 \langle Z, \text{grad}(\sigma) \rangle &= N^2 Z(\sigma) \\
&= N^2 (A + \sigma X)(\sigma) \\
&= N(NA + N(\sigma X))(\sigma) \\
&= N(NA - AN + AN + N(\sigma X) - (\sigma X)N + (\sigma X)N)(\sigma) \\
&= N([N, A] + AN + [N, \sigma X] + (\sigma X)N)(\sigma) \\
&= N(AN + X(\sigma)N + (\sigma X)N)(\sigma) \\
&= N(A(N(\sigma)) + X(\sigma)N(\sigma) + (\sigma X)(N(\sigma))) \\
&= N(A(1)) + N(X(\sigma)) + N((\sigma X)(1)) \\
&= N(X(\sigma)) \\
&= \sum_{j=k+1}^n \frac{x_j}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{\sigma} \alpha_i x_i \right) \\
&= \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=k+1}^n \frac{x_j}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\sigma} \alpha_i x_i \right) \\
&= \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=k+1}^n \frac{x_j}{\sigma} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\sigma} \right) \alpha_i x_i + \frac{1}{\sigma} \alpha_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=k+1}^n \frac{x_j}{\sigma} \left( \sum_{l=k+1}^n -\frac{1}{\sigma^3} x_l \delta_{lj} \alpha_i x_i + \frac{1}{\sigma} \alpha_i \delta_{ij} \right) \\
&= - \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=k+1}^n \sum_{l=k+1}^n \frac{\alpha_i}{\sigma^4} x_j x_l x_i \delta_{lj} + \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=k+1}^n \frac{\alpha_i}{\sigma^2} x_j \delta_{ij} \\
&= - \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=k+1}^n \frac{\alpha_i}{\sigma^4} x_j^2 x_i + \sum_{i=k+1}^n \frac{\alpha_i}{\sigma^2} x_i \\
&= - \sum_{j=k+1}^n \frac{x_j^2}{\sigma^2} \sum_{i=k+1}^n \frac{\alpha_i}{\sigma^2} x_i + \sum_{i=k+1}^n \frac{\alpha_i}{\sigma^2} x_i \\
&= - \sum_{i=k+1}^n \frac{\alpha_i}{\sigma^2} x_i + \sum_{i=k+1}^n \frac{\alpha_i}{\sigma^2} x_i = 0. \tag{53}
\end{aligned}$$

De (52) e (53) temos que ao longo de uma geodésica qualquer  $\gamma$  p.p.c.a. normal a  $\Gamma$  as funções  $t \mapsto \langle Z, N \rangle(\gamma(t))$  e  $t \mapsto \langle Z, \text{grad}(\sigma) \rangle(\gamma(t))$  são ambas lineares em  $t$ .

Para provar que são a mesma função basta provar que o limite delas e de suas derivadas coincidem no 0. De fato, pelo Lema 2.61 podemos tomar cartas coordenadas de Fermi tais que  $(x_i \circ \gamma)(t) = t\delta_{ik+1}$ , para  $1 \leq i \leq n$ . Logo

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \langle Z, N \rangle(\gamma(t)) &= \lim_{t \rightarrow 0} \langle A + \sigma X, N \rangle(\gamma(t)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \langle A(\gamma(t)), N(\gamma(t)) \rangle + \lim_{t \rightarrow 0} \sigma(\gamma(t)) \langle X(\gamma(t)), N(\gamma(t)) \rangle \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \langle 0, N(\gamma(t)) \rangle + \lim_{t \rightarrow 0} \sigma(\gamma(t)) \left\langle \sum_{l=k+1}^n \alpha_l \frac{\partial}{\partial x_l}(\gamma(t)), \sum_{j=k+1}^n \frac{x_j(\gamma(t))}{\sigma(\gamma(t))} \frac{\partial}{\partial x_j}(\gamma(t)) \right\rangle \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} t \left\langle \sum_{l=k+1}^n \alpha_l \frac{\partial}{\partial x_l}(\gamma(t)), \sum_{j=k+1}^n \frac{t\delta_{jk+1}}{t} \frac{\partial}{\partial x_j}(\gamma(t)) \right\rangle \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} t \left\langle \sum_{l=k+1}^n \alpha_l \frac{\partial}{\partial x_l}(\gamma(t)), \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}(\gamma(t)) \right\rangle \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} t\alpha_{k+1} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{54}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \langle Z, \text{grad}(\sigma) \rangle(\gamma(t)) &= \lim_{t \rightarrow 0} Z(\sigma)(\gamma(t)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} A(\sigma)(\gamma(t)) + \lim_{t \rightarrow 0} \sigma X(\sigma)(\gamma(t)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \sigma X(\sigma)(\gamma(t)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{i=k+1}^n \alpha_i x_i(\gamma(t)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{i=k+1}^n \alpha_i t\delta_{ik+1} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} t\alpha_{k+1} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{55}$$

Agora, para as derivadas, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} N \langle Z, N \rangle(\gamma(t)) &= \lim_{t \rightarrow 0} (\langle \nabla_N Z, N \rangle + \langle Z, \nabla_N N \rangle)(\gamma(t)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \langle \nabla_N A + \nabla_N(\sigma X), N \rangle(\gamma(t)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} (\langle \nabla_N A, N \rangle + \langle N(\sigma)X + \sigma \nabla_N X, N \rangle)(\gamma(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} A|N|^2 + \langle X, N \rangle + \sigma N \langle X, N \rangle \right) (\gamma(t)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} A(\gamma(t)) + \lim_{t \rightarrow 0} \langle X, N \rangle (\gamma(t)) + \lim_{t \rightarrow 0} \sigma N(\langle X, N \rangle (\gamma(t))) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_{k+1} + \lim_{t \rightarrow 0} \sigma N(\alpha_{k+1}) \\
&= \alpha_{k+1}.
\end{aligned} \tag{56}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} N \langle Z, \text{grad}(\sigma) \rangle (\gamma(t)) &= \lim_{t \rightarrow 0} N(Z(\sigma))(\gamma(t)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} N(A + \sigma X)(\sigma)(\gamma(t)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} (NA - AN + AN + N(\sigma)X + \sigma NX)(\sigma)(\gamma(t)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} ([N, A] + AN + X + \sigma NX)(\sigma)(\gamma(t)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} (A(N(\sigma)) + X(\sigma) + \sigma N(X(\sigma)))(\gamma(t)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} X(\sigma)(\gamma(t)) + \lim_{t \rightarrow 0} \sigma(\gamma(t)) N(X(\sigma)(\gamma(t))) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma(\gamma(t))} \sum_{i=k+1}^n \alpha_i x_i(\gamma(t)) + \lim_{t \rightarrow 0} \sigma(\gamma(t)) N \left( \frac{1}{\sigma(\gamma(t))} \sum_{i=k+1}^n \alpha_i x_i(\gamma(t)) \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sum_{i=k+1}^n \alpha_i t \delta_{ik+1} + \lim_{t \rightarrow 0} t N \left( \frac{1}{t} \sum_{i=k+1}^n \alpha_i t \delta_{ik+1} \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_{k+1} + \lim_{t \rightarrow 0} t N(\alpha_{k+1}) \\
&= \alpha_{k+1}.
\end{aligned} \tag{57}$$

Por (54), (55), (56) e (57) temos que as funções  $t \mapsto \langle Z, N \rangle (\gamma(t))$  e  $t \mapsto \langle Z, \text{grad}(\sigma) \rangle (\gamma(t))$  são iguais. Como  $\gamma$  é arbitrário, temos que

$$\langle Z, N \rangle = \langle Z, \text{grad}(\sigma) \rangle.$$

Além disso, para  $q \in M$  numa vizinhança de  $\Gamma$  todo vetor em  $T_q M$  é da forma  $Z = A + \sigma X$ ,  $A \in \mathfrak{X}(\Gamma, p)^T$  e  $X \in \mathfrak{X}(\Gamma, p)^\perp$ . Então concluímos que  $N = \text{grad}(\sigma)$ , como requerido.  $\square$

**Corolário 2.68.** *O Lema de Gauss generalizado implica o Lema de Gauss.*

*Demonstração.* Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $p \in M$  um ponto arbitrário e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal de  $T_p M \cong T_0(T_p M)$ . Note que as cartas coordenadas

normais em  $T_p M$ , associadas a base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , são a base dual a  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Assim, podemos considerar  $\bar{N}$  o vetor normal definido da Definição 2.63 e  $s$  uma função distância, também da Definição 2.63, para  $T_p M$ . Considere também  $N$  o vetor normal da Definição 2.63 e  $\sigma$  é a função distância, também da Definição 2.63, para  $M$ .

Note que por (28) do Lema 2.66 temos que  $N(\sigma) = 1$  e  $\bar{N}(s) = 1$ . Pelo Lema 2.67 temos que

$$|N| = \langle N, N \rangle = \langle N, \text{grad}(\sigma) \rangle = N(\sigma) = 1 \quad (58)$$

e

$$|\bar{N}| = \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle = \langle \bar{N}, \text{grad}(s) \rangle = \bar{N}(s) = 1. \quad (59)$$

Mas, pelo Lema 2.65 sabemos que  $\bar{N}$  é o vetor tangente as geodésicas radiais em  $T_p M$  e  $N$  é o vetor tangente as geodésicas radiais em  $M$ . Portanto, por (58) e (59) temos que  $\exp_p$  preserva o comprimento de vetores tangentes às geodésicas radiais.

Da interpretação usual do operador gradiente temos que  $\text{grad}(\sigma)$  é perpendicular a cada uma das hipersuperfícies  $\sigma = \text{constante}$ . O mesmo vale para  $\text{grad}(s)$  em  $T_p M$ . Em outras palavras, os vetores tangentes às geodésicas radiais são perpendiculares as hipersuperfícies  $\sigma = \text{constante}$  em  $M$  e  $s = \text{constante}$  em  $T_p M$ . Portanto, temos que  $\exp_p$  também preserva a ortogonalidade entre vetores tangentes às geodésicas radiais e os vetores tangentes às esferas geodésicas em  $T_p M$  e  $M$ .  $\square$

## 2.7 CAMPOS DE JACOBI E O CONJUGATED-LOCUS

Nesta seção iremos definir os campos de Jacobi, apresentar algumas propriedades e relacioná-los com os campos de Fermi. Além disso, construiremos o conjugated-locus, que terá grande importância posteriormente.

**Definição 2.69.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica de  $M$ . Um campo de vetores  $J$  ao longo de  $\gamma$  é um **campo de Jacobi** se satisfaz a equação de Jacobi:*

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0, \quad (60)$$

pata todo  $t \in [0, a]$ .

**Observação 2.70.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional,  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica de  $M$  e  $J$  um campo de Jacobi. Afirmamos que o campo de Jacobi  $J$  é determinado pelas condições iniciais  $J(0)$  e  $\frac{DJ}{dt}(0)$ .

De fato, seja  $\{E_1(t), \dots, E_n(t)\}$  campos paralelos e ortonormais ao longo de  $\gamma$ . Considere

$$J(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) E_i(t) \quad \text{e} \quad a_{ij} = \langle R(\gamma'(t), E_i(t))\gamma'(t), E_j(t) \rangle,$$

com  $i, j = 1, \dots, n$ . Então

$$\frac{D^2 J}{dt^2} = \sum_{i=1}^n f_i''(t) E_i(t),$$

e

$$R(\gamma', J)\gamma' = \sum_{j=1}^n \langle R(\gamma', J)\gamma', E_j \rangle E_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f_i \langle R(\gamma', E_i)\gamma', E_j \rangle E_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f_i a_{ij} E_j.$$

Portanto, (6o) é equivalente ao sistema

$$f_j''(t) + \sum_{i=1}^n a_{ij}(t) f_i(t) = 0,$$

$j = 1, \dots, n$ . Que é um sistema linear de segunda ordem. Assim, da teoria das EDO's, dadas as condições iniciais  $J(0)$  e  $\frac{DJ}{dt}(0)$ , existe uma solução de classe  $C^\infty$  do sistema, definida em  $[0, a]$ .

Quando demostramos o lema de Gauss definimos as superfícies parametrizadas e, sem dar nomes, construímos um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica. A próxima proposição mostra que essa é, essencialmente, a única maneira de construirmos campos de Jacobi ao longo de uma geodésica.

**Proposição 2.71.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica normalizada em  $M$  e  $J$  um campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  com  $J(0) = 0$ . Faça  $\frac{DJ}{dt}(0) = w$  e  $\gamma'(0) = v$ . Considere  $w \in T_{av}(T_{\gamma(0)}M)$  e construa uma curva  $v(s)$  em  $T_{\gamma(0)}M$  com  $v(0) = av$  e  $v'(0) = w$ . Faça  $f(t, s) = \exp_p tv(s)$ ,  $p = \gamma(0)$ , e defina um campo de Jacobi  $\bar{J}$  por  $\bar{J}(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$ . Então  $\bar{J} = J$  em  $[0, a]$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Proposição 2.4, p. 126].  $\square$

**Corolário 2.72.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica. Então um campo de Jacobi  $J$  ao longo de  $\gamma$  com  $J(0) = 0$  é dado por

$$J(t) = (d\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)), \quad t \in [0, a].$$

*Demonstração.* Segue diretamente da Proposição 2.71.  $\square$

Com as principais propriedades dos campos de Jacobi estudadas podemos relacioná-los com os campos de Fermi estudados anteriormente.

**Proposição 2.73.** *Sejam  $\Gamma \subset M$  uma subvariedade mergulhada  $k$ -dimensional de uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional  $(M, g)$  e  $p \in \Gamma$  um ponto arbitrário. Considere  $\gamma$  uma geodésica normal a  $\Gamma$  em  $p$  e suponha que tenhamos  $X \in \mathfrak{X}(\Gamma, p)^\perp$  e  $A \in \mathfrak{X}(\Gamma, p)^T$ . Então as restrições a  $\gamma$*

$$\sigma X|_{\gamma} \quad \text{e} \quad A|_{\gamma}$$

*são campos de Jacobi.*

*Demonstração.* Segue diretamente de (48), notando-se que  $N|_{\gamma(s)} = \gamma'(s)$ , pelo Lema 2.65, que

$$\begin{aligned} (\sigma X|_{\gamma})'' &= \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} (\sigma X|_{\gamma}) \\ &= \nabla_{N|_{\gamma}} \nabla_{N|_{\gamma}} (\sigma X|_{\gamma}) \\ &= (\nabla_N \nabla_N (\sigma X))|_{\gamma} \\ &= (-R(N, \sigma X)N)|_{\gamma} \\ &= -R(\gamma', \sigma X)\gamma'. \end{aligned}$$

Donde segue-se que  $\sigma X|_{\gamma}$  é um campo de Jacobi, como requerido. A prova de que  $A|_{\gamma}$  é um campo de Jacobi é análoga usando-se (51).  $\square$

**Proposição 2.74.** *Sejam  $\Gamma \subset M$  uma subvariedade mergulhada  $k$ -dimensional de uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional  $(M, g)$  e  $p \in \Gamma$  um ponto arbitrário. Considere  $(x_1, \dots, x_n)$  uma carta coordenada de Fermi centrada em  $p$ . Então, ao longo de qualquer geodésica normal, o campo de vetores*

$$\sigma \frac{\partial}{\partial x_i}$$

*são campos de Jacobi para  $k+1 \leq i \leq n$ .*

*Demonstração.* Basta considerarmos na Proposição 2.73 os campos  $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $k+1 \leq i \leq n$  e o resultado segue.  $\square$

Assim, vamos definir o conjugated-locus e depois mostrarmos, através da próxima proposição, que um ponto é conjugado a outro ao longo de uma geodésica se, e somente se, for um ponto crítico da aplicação exponencial.

**Definição 2.75.** Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica de  $M$ . O ponto  $\gamma(t_0)$  é **conjugado** de  $\gamma(0)$  ao longo de  $\gamma$ ,  $t_0 \in [0, a[$ , se existe um campo de Jacobi  $J$  ao longo de  $\gamma$ , não identicamente nulo, com  $J(0) = 0 = J(t_0)$ . O número máximo de tais campos linearmente independentes é a **multiplicidade** do ponto conjugado  $\gamma(t_0)$ .

Note que se  $\gamma(t_0)$  é conjugado de  $\gamma(0)$ , então  $\gamma(0)$  é conjugado de  $\gamma(t_0)$ .

**Definição 2.76.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $p \in M$  um ponto de  $M$ . O conjunto dos (primeiros) pontos conjugados de  $p$ , para todas as geodésicas que saem de  $p$ , é chamado de **conjugated-locus** de  $p$  e é indicado por  $C(p)$ .

**Proposição 2.77.** Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica de  $M$  tal que  $\gamma(0) = p$ . O ponto  $q = \gamma(t_0)$ ,  $t_0 \in [0, a[$ , é conjugado de  $p$  ao longo de  $\gamma$  se, e somente se,  $v_0 = t_0\gamma'(0)$  é um ponto crítico de  $\exp_p$ . Além disso, a multiplicidade de  $q$  como ponto conjugado de  $p$  é igual a dimensão do núcleo da aplicação linear  $(d\exp_p)_{v_0}$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Proposição 3.5, p. 130]. □

## 2.8 A SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

Considere  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $k$ -dimensional, onde  $k = m + n$ , e  $f : N \rightarrow M$  uma imersão, onde  $N$  é uma subvariedade  $n$ -dimensional. Para cada  $p \in N$ , o produto interno em  $T_p M$  decompõe  $T_p M$  na soma direta

$$T_p M = T_p N \oplus (T_p N)^\perp,$$

onde  $(T_p N)^\perp$  é o complemento ortogonal de  $T_p N$  em  $T_p M$ . Assim, para  $v \in T_p M$ , podemos escrever

$$v = v^T + v^\perp,$$

onde  $v^T \in T_p N$  e  $v^\perp \in (T_p N)^\perp$ .

Note que já usamos essa decomposição anteriormente nas cartas coordenadas de Fermi e em campos de Fermi.

**Definição 2.78.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $k$ -dimensional, onde  $k = m + n$ ,  $f : N \rightarrow M$  uma imersão, onde  $N$  é uma subvariedade  $n$ -dimensional e  $p \in N$  um ponto de  $N$ . Para  $v \in T_p M$  denominamos  $v^T \in T_p N$  de **componente tangencial** de  $v$  e  $v^\perp \in (T_p N)^\perp$  de **componente normal** de  $v$ .

Note que a decomposição proposta acima é diferenciável no sentido que as aplicações de  $TM$  em  $TM$  dadas por

$$(p, v) \mapsto (p, v^T) \quad \text{e} \quad (p, v) \mapsto (p, v^\perp)$$

são diferenciáveis.

**Definição 2.79.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $k$ -dimensional, onde  $k = m + n$ , e  $f : N \rightarrow M$  uma imersão, onde  $N$  é uma subvariedade  $n$ -dimensional. Considere  $\bar{\nabla}$  a conexão Riemanniana de  $M$  e, para  $X, Y$  campos locais de  $N$ ,  $\bar{X}, \bar{Y}$  as extensões locais a  $M$ . Assim, definimos a conexão de  $N$  por*

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T.$$

Note que da Definição 2.79 temos a conexão Riemanniana de  $N$  relativa à métrica induzida de  $M$ .

Com a próxima proposição começaremos a dar estrutura para podermos definir a segunda forma fundamental, o operador forma e algumas curvaturas para subvariedades.

**Proposição 2.80.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $k$ -dimensional, onde  $k = m + n$ ,  $f : N \rightarrow M$  uma imersão, onde  $N$  é uma subvariedade  $n$ -dimensional, e  $U \subset N$  um subconjunto aberto de  $N$ . Considere  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ , a aplicação  $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$ , onde  $\mathfrak{X}(U)^\perp$  são os campos diferenciáveis em  $U$  de vetores normais a  $f(U) \approx U$ , dada por*

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y.$$

está bem definida e, além disso, é bilinear e simétrica.

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Proposição 2.1, p. 140 - 141].  $\square$

Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $k$ -dimensional, onde  $k = m + n$ ,  $f : N \rightarrow M$  uma imersão, onde  $N$  é uma subvariedade  $n$ -dimensional,  $p \in N$  um ponto de  $N$  e  $\eta \in (T_p N)^\perp$  um vetor normal a  $N$ . A aplicação  $H_\eta : T_p N \times T_p N \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle,$$

onde  $x, y \in T_p N$ , é, pela Proposição 2.80, uma forma bilinear simétrica.

**Definição 2.81.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $k$ -dimensional, onde  $k = m + n$ ,  $f : N \rightarrow M$  uma imersão, onde  $N$  é uma subvariedade  $n$ -dimensional,  $p \in N$  um ponto de  $N$  e*

$\eta \in (T_p N)^\perp$  um vetor normal a  $N$ . Definimos a **segunda forma fundamental de  $f$  em  $p$**  segundo o **vetor normal**  $\eta$  como a forma quadrática  $II_\eta$  em  $T_p N$  dada por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x).$$

**Definição 2.82.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $k$ -dimensional, onde  $k = m + n$ ,  $f : N \rightarrow M$  uma imersão, onde  $N$  é uma subvariedade  $n$ -dimensional,  $p \in N$  um ponto de  $N$  e  $\eta \in (T_p N)^\perp$  um vetor normal a  $N$ . Definimo o **operador forma de  $f$  em  $p$  segundo o vetor normal**  $\eta$  como a aplicação linear auto-adjunta  $S_\eta : T_N \rightarrow T_p N$  dada por

$$\langle -S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

Com a segunda forma fundamental e o operador forma de uma subvariedade definidos, podemos estudar algumas propriedades de ambos em alguns casos particulares. Comecemos com a seguinte proposição.

**Proposição 2.83.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $k$ -dimensional, onde  $k = m + n$ ,  $f : N \rightarrow M$  uma imersão, onde  $N$  é uma subvariedade  $n$ -dimensional,  $p \in N$  um ponto de  $N$ ,  $x \in T_p N$  e  $\eta \in (T_p N)^\perp$  um vetor normal a  $N$ . Considere  $N$  uma extensão local de  $\eta$  normal a  $N$ . Então

$$S_\eta(x) = \nabla_x \eta.$$

*Demonstração.* Sejam  $y \in T_p N$  arbitrário e  $X, Y$  as extensões locais de  $x$  e  $y$ , respectivamente, e tangentes a  $N$ . Então  $\langle N, Y \rangle = 0$  e, portanto,

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &= \langle -B(x, y)(p), \eta \rangle = \langle -\bar{\nabla}_X Y + \nabla_x y, N \rangle(p) = \langle -\bar{\nabla}_X Y, N \rangle(p) = \langle Y, \bar{\nabla}_X N \rangle(p) \\ &= \langle \nabla_x \eta, y \rangle. \end{aligned}$$

□

Um caso particular de imersões que será de grande interesse no decorrer dessa dissertação é o caso de codimensão 1, isto é, quando a imersão é uma hipersuperfície.

Assim, considere  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $k$ -dimensional, onde  $k = 1 + n$ , e  $f : N \rightarrow M$  uma imersão, onde  $N$  é uma subvariedade  $n$ -dimensional. Seja  $p \in N$  e  $\eta \in (T_p N)^\perp$ ,  $|\eta| = 1$ . Como  $S_\eta : T_p N \rightarrow T_p N$  é simétrica, existe uma base ortonormal de vetores próprios  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T_p N$  com valores próprios reais  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , isto é,  $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Além disso, se  $N$  e  $M$  são ambas orientáveis e estão orientadas então o vetor  $\eta$  fica univocamente determinado se exigirmos que sendo  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base de orientação para  $N$ ,  $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$  seja uma base na orientação de  $M$ .

Com isso podemos definir as curvaturas de uma hipersuperfície que serão estudadas posteriormente.

**Definição 2.84.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $k$ -dimensional, onde  $k = 1 + n$ ,  $f : N \rightarrow M$  uma imersão, onde  $N$  é uma subvariedade  $n$ -dimensional,  $p \in N$  e  $\eta \in (T_p N)^\perp$ ,  $|\eta| = 1$ . Denominamos os vetores próprios  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $S_\eta : T_p N \rightarrow T_p N$  como as **direções principais de  $N$  em  $p$**  e os valores reais  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  associados aos vetores próprios  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $S_\eta : T_p N \rightarrow T_p N$  como as **curvaturas principais de  $N$  em  $p$** .*

**Definição 2.85.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $k$ -dimensional, onde  $k = 1 + n$ ,  $f : N \rightarrow M$  uma imersão, onde  $N$  é uma subvariedade  $n$ -dimensional,  $p \in N$  e  $\eta \in (T_p N)^\perp$ ,  $|\eta| = 1$ . Considere  $\kappa_1(p), \dots, \kappa_n(p)$  as curvaturas principais de  $N$  em  $p$ . Definimos a **curvatura de Gauss-Kronecker de  $N$  em  $p$**  por*

$$GK(p) = \det(S_\eta) = \prod_{i=1}^n \kappa_i(p).$$

**Definição 2.86.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $k$ -dimensional, onde  $k = 1 + n$ ,  $f : N \rightarrow M$  uma imersão, onde  $N$  é uma subvariedade  $n$ -dimensional,  $p \in N$  e  $\eta \in (T_p N)^\perp$ ,  $|\eta| = 1$ . Considere  $\kappa_1(p), \dots, \kappa_n(p)$  as curvaturas principais de  $N$  em  $p$ . Definimos a **curvatura média normalizada de  $N$  em  $p$**  por*

$$H(p) = \frac{1}{n} \operatorname{tr}(S_\eta) = \frac{1}{n} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n).$$

**Definição 2.87.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $k$ -dimensional, onde  $k = 1 + n$ ,  $f : N \rightarrow M$  uma imersão, onde  $N$  é uma subvariedade  $n$ -dimensional,  $p \in N$  e  $\eta \in (T_p N)^\perp$ ,  $|\eta| = 1$ . Considere  $GK(p)$  a curvatura de Gauss-Kronecker de  $N$  em  $p$ . Definimos a **curvatura total de Gauss-Kronecker de  $N$**  por*

$$\mathcal{G}(N) = \int_N GK d\sigma.$$

## 2.9 VARIEDADES COMPLETAS E O TEOREMA DE HADAMARD

Nesta seção vamos estudar algumas propriedades globais de variedades Riemannianas e vamos definir as variedades de Cartan-Hadamard, que é um dos espaços ambiente

no qual estudaremos os resultados obtidos por Mohammad Ghomi e Joel Spruck no artigo “Total curvature and the isoperimetric inequality in Cartan-Hadamard manifolds” [GS21].

**Definição 2.88.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $p \in M$  um ponto de  $M$ . Dizemos que  $M$  é **completa** se a aplicação exponencial,  $\exp_p$ , está definida para todo  $v \in T_p M$ , em outras palavras, se as geodésicas  $\gamma(t)$  que partem de  $p$  estão definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

O teorema de Hopf-Rinow vai dar-nos algumas equivalências para o conceito de completeza.

**Teorema 2.89** (Hopf e Rinow). *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $p \in M$  um ponto. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $M$  é completa.
2.  $\exp_p$  está definida em todo  $T_p M$ .
3. Os limitados e fechados de  $M$  são compactos.
4.  $M$  é completa como espaço métrico.
5. Existe uma sucessão de compactos  $K_n \subset M$ ,  $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$  e  $\cup_n K_n = M$ , tais que se  $q_n \notin K_n$  então  $d(p, q_n) \rightarrow \infty$ .

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

- Para todo  $q \in M$  existe uma geodésica  $\gamma$  ligando  $p$  a  $q$  com  $l(\gamma) = d(p, q)$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Teorema 2.8, p. 162 - 165].  $\square$

Assim, como uma aplicação do teorema de Hopf-Rinow temos o teorema de Hadamard.

**Teorema 2.90** (Hadamard). *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional, completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional  $K(p, \sigma) \leq 0$ , para todo  $p \in M$  e todo  $\sigma \subset T_p M$ . Então  $M$  é difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ ; mais precisamente,  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  é um difeomorfismo.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Teorema 3.1, p. 165 - 168].  $\square$

Por causa do teorema de Hadamard temos a seguinte definição para variedades de Cartan-Hadamard.

**Definição 2.91.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional  $K(p, \sigma) \leq 0$ , para todo  $p \in M$  e todo  $\sigma \subset T_p M$ . Chamamos  $M$  de **variedade de Cartan-Hadamard**.*

## 2.10 TEOREMA DE CARTAN SOBRE A DETERMINAÇÃO DA MÉTRICA

Nesta seção apresentaremos o teorema de Cartan sobre a determinação da métrica, o qual será utilizado algumas vezes ao longo da dissertação. Para isso consideremos  $M$  e  $\overline{M}$  duas variedades Riemannianas  $n$ -dimensionais e considere  $p \in M$  e  $\overline{p} \in \overline{M}$ . Escolha uma isometria linear  $i : T_p M \rightarrow T_{\overline{p}} \overline{M}$ . Seja  $V \subset M$  uma vizinhança normal de  $p$  tal que  $\exp_{\overline{p}}$  está definida em  $i \circ \exp_p^{-1}(V)$ . Defina uma aplicação  $f : V \rightarrow \overline{M}$  por

$$f(q) = \exp_{\overline{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}(q), \quad q \in V.$$

Para todo  $q \in V$  existe uma geodésica normalizada  $\gamma : [0, t] \rightarrow M$  com  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(t) = q$ . Indicaremos por  $P_t$  o transporte paralelo ao longo de  $\gamma$  de  $\gamma(0)$  a  $\gamma(t)$ . Defina ainda  $\phi_t : T_q M \rightarrow T_{f(q)} \overline{M}$  por

$$\phi_t(v) = \overline{P}_t \circ i \circ P_t^{-1}(v), \quad v \in T_q M,$$

onde  $\overline{P}_t$  é o transporte paralelo ao longo da geodésica normalizada  $\overline{\gamma} : [0, t] \rightarrow \overline{M}$  dada por  $\overline{\gamma}(0) = \overline{p}$ ,  $\overline{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$ . Finalmente, indicaremos por  $R$  e  $\overline{R}$  as curvaturas de  $M$  e  $\overline{M}$ , respectivamente.

**Teorema 2.92.** *Com as notações acima, se para todo  $q \in V$  e todo  $x, y, u, v \in T_q M$  tem-se*

$$\langle R(x, y)u, v \rangle = \langle \overline{R}(\phi_t(x), \phi_t(y))\phi_t(u), \phi_t(v) \rangle,$$

*então  $f : V \rightarrow f(V) \subset \overline{M}$  é uma isometria local e  $df_p = i$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Teorema 2.1, p. 174 - 176].  $\square$

## 2.11 O CUT LOCUS

As propriedades do cut locus serão melhor estudadas posteriormente, portanto abordaremos apenas de uma forma superficial inicialmente, pois o objetivo final é relacionar os pontos críticos da função distância com o cut locus.

**Definição 2.93.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $p \in M$  um ponto de  $M$  e  $\gamma : [0, \infty[ \rightarrow M$  uma geodésica normalizada com  $\gamma(0) = p$ . Se o conjunto dos números  $t > 0$  para*

os quais  $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$  é da forma  $[0, t_0]$  então o definimos  $\gamma(t_0)$  como o **ponto de corte de  $p$  ao longo de  $\gamma$** . Além disso, o **cut locus de  $p$**   $cut(p)$  é o conjunto de todos os pontos de corte de  $p$  ao longo de todas as geodésicas que partem de  $p$ .

A próxima proposição relaciona o cut locus com o conjugated-locus.

**Proposição 2.94.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $p \in M$  um ponto de  $M$  e  $\gamma : [0, \infty[ \rightarrow M$  uma geodésica normalizada com  $\gamma(0) = p$ . Suponha que  $\gamma(t_0)$  é um ponto de corte de  $p$  ao longo de  $\gamma$ . Então*

1. ou  $\gamma(t_0)$  é o primeiro ponto conjugado de  $\gamma(0)$  ao longo de  $\gamma$ ,
2. ou existe uma geodésica  $\sigma \neq \gamma$  de  $p$  a  $\gamma(t_0)$  tal que  $l(\sigma) = l(\gamma)$ .

Reciprocamente, se (1) ou (2) se verifica, então existe  $\bar{t}$  em  $[0, t_0[$  tal que  $\gamma(\bar{t})$  é o ponto de corte de  $p$  ao longo de  $\gamma$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [dC15, Proposição 2.2, p. 296]. □

**Observação 2.95.** *Uma variedade Riemanniana compacta  $M$  para a qual o cut locus  $cut(p)$  de todo  $p \in M$  se reduz a um único ponto é chamada de **variedade wiedersehen**. Existe um resultado devido a L. Green [Gre63] que as superfícies wiedersehen são isométricas às esferas. Este resultado foi generalizado por M. Berger e J. Kazdan [Bes78] para o caso em que a dimensão de  $M$  é par, e por C.T. Yang [Yan80] para o caso em que a dimensão de  $M$  é ímpar.*

O próximo corolário nos dá um tipo de simetria para os cut-points ao longo de uma geodésica.

**Corolário 2.96.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $p, q \in M$  pontos de  $M$  e  $\gamma : [0, \infty[ \rightarrow M$  uma geodésica em  $M$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(a) = q$ . Se  $q \in M$  é um ponto de corte de  $p$  ao longo de  $\gamma$  então  $p$  é um ponto de corte de  $q$  ao longo de  $-\gamma$ ; em particular,  $q \in cut(p)$  se, e somente se,  $p \in cut(q)$ .*

*Demonstração.* Segue diretamente da Proposição 2.94. De fato, pois suponha que  $p$  é o ponto de corte de  $q$  ao longo de uma geodésica  $\gamma$ , então, pela Proposição 2.94, ou  $q$  é conjugado a  $p$ , ou existe uma geodésica  $\sigma \neq \gamma$ , ligando  $p$  a  $q$ , tal que  $l(\sigma) = l(\gamma) = d(p, q)$ . Em ambos os casos, o ponto de corte de  $q$  ao longo de  $-\gamma$  não ocorre depois de  $p$ . Como  $l(-\gamma) = d(p, q)$ , concluímos que  $p$  é ponto de corte de  $q$  ao longo de  $-\gamma$ . □

**Corolário 2.97.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $p \in M$  um ponto de  $M$  e  $\gamma : [0, \infty[ \rightarrow M$  uma geodésica normalizada com  $\gamma(0) = p$ . Suponha que  $\gamma(t_0) \in M \setminus \text{cut}(p)$ . Então existe uma única geodésica minimizante ligando  $p$  a  $q$ .*

*Demonstração.* Segue diretamente da Proposição 2.94.  $\square$

O Corolário 2.97 mostra que  $\exp_p$  é injetiva em uma bola aberta  $B_r(p)$  centrada em  $p$  se, e somente se, o raio  $r$  é menor ou igual a distância de  $p$  a  $\text{cut}(p)$ .

**Definição 2.98.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $p \in M$  um ponto de  $M$ . Definimos o **raio de injetividade de  $M$**  como sendo*

$$i(M) = \inf_{p \in M} d(p, \text{cut}(p)).$$

O Corolário 2.97 mostra também que  $M \setminus \text{cut}(p)$  é homeomorfo a uma bola aberta do espaço euclideano (via coordenadas normais). Em certo sentido, isto indica que a topologia de  $M$  está contida no seu cut locus.

## 2.12 SUAVIZADORES

Nesta seção vamos demonstrar alguns resultados sobre os suavizadores. Como estes resultados são locais podemos considerar  $M = \mathbb{R}^n$  com a métrica canônica. Nosso objetivo agora é definir uma sequência generalizada de métricas Riemannianas suaves que se aproximam de  $g$ .

Assim, considere  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  com suporte compacto, isto é,  $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}} \subset \mathbb{R}^n$  é compacto e

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1.$$

Para  $\varepsilon > 0$ , defina

$$f^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

A função  $f^\varepsilon$  é chamada de *suavizador padrão*. Observe que  $\text{supp}(f^\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$  também é compacto, pois  $\text{supp}(f)$  é compacto e  $f^\varepsilon$  e  $f$  diferem somente por uma homotetia e

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\varepsilon(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varepsilon^n dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy = 1$$

Definimos agora, para uma função  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, o *produto de convolução*  $h_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , por

$$h_\varepsilon(x) = (h * f^\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(y) f^\varepsilon(x - y) dy.$$

Note que o produto de convolução definido acima está bem definido pois  $h(y)f^\varepsilon(x - y)$  é contínua e não nula somente num conjunto compacto.

Com a definição de produto de convolução tomaremos a sequência generalizada de métricas Riemannianas por  $(g_\varepsilon)$ . A seguir provaremos o desejado, isto é, que  $(g_\varepsilon)$  é uma sequência generalizada de métricas Riemannianas suaves que se aproximam de  $g$ .

**Lema 2.99.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana com métrica de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$ . Considere a sequência generalizada  $(g_\varepsilon)$ , onde  $g_\varepsilon$  é dada pelo produto de convolução de  $g$ . Afirmamos que*

1.  $g_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ .
2.  $g_\varepsilon \rightarrow g$  uniformemente em todo  $V \subset \mathbb{R}^n$  compacto.

*Demonstração.* (1): Afirmamos que para  $x, v \in \mathbb{R}^n$  arbitrários com  $|v| = 1$  temos que

$$\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial v}(x) = \left( g * \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial v} \right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial v}(x - y) dy. \quad (61)$$

Como  $f^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  e  $g \in \mathcal{C}^{1,1}$  segue-se de (61) que  $g_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  como requerido.

Agora, vamos provar que para  $x, v \in \mathbb{R}^n$  arbitrários com  $|v| = 1$  vale (61).

De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_\varepsilon(x + hv) - g_\varepsilon(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (g_\varepsilon(x + hv) - g_\varepsilon(x)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{\mathbb{R}^n} g(y) f^\varepsilon(x + hv - y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} g(y) f^\varepsilon(x - y) dy \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{\mathbb{R}^n} g(y) (f^\varepsilon(x + hv - y) - f^\varepsilon(x - y)) dy \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left( \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x + hv - y}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) \right) dy \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \left( \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \frac{1}{h} \left( f\left(\frac{x + hv - y}{\varepsilon}\right) - f\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) \right) dy \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \left( \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \frac{f\left(\frac{x + hv - y}{\varepsilon}\right) - f\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right)}{h} dy \right) \end{aligned} \quad (62)$$

Considere  $\zeta_h(x) = g(y) \frac{f\left(\frac{x+hv-y}{\varepsilon}\right) - f\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)}{h}$  e  $\zeta(x) = g(y) \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$ . Afiramos que  $\zeta_h \rightarrow \zeta$ , quando  $h \rightarrow 0$ , e  $|\zeta_h(x)| \leq \gamma(x)$ , onde  $\gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável.

De fato,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \zeta_h(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} g(y) \frac{f\left(\frac{x+hv-y}{\varepsilon}\right) - f\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)}{h} \\
&= g(y) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{x+hv-y}{\varepsilon}\right) - f\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)}{h} \\
&= g(y) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{x-y}{\varepsilon} + \frac{h}{\varepsilon}v\right) - f\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)}{h} \\
&= g(y) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{f\left(\frac{x-y}{\varepsilon} + \frac{h}{\varepsilon}v\right) - f\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)}{\frac{h}{\varepsilon}} \\
&= g(y) \frac{1}{\varepsilon} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{x-y}{\varepsilon} + kv\right) - f\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)}{k} \\
&= g(y) \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \\
&= \zeta(x)
\end{aligned}$$

Considere  $\psi(x) = f\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$ . Como  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  temos que  $Df(x)$  é contínua e, pelo Teorema de Weirstrass, limitada em um conjunto compacto, isto é, para  $t \in [0, h]$  existe  $M \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\left|Df\left(\frac{x+tv-y}{\varepsilon}\right) \cdot v\right| \leq M$ , logo

$$\begin{aligned}
|\psi(x+hv) - \psi(x)| &= \left| \int_0^h \frac{d}{dt} \psi(x+tv) dt \right| \\
&= \left| \int_0^h D\psi(x+tv) \cdot v dt \right| \\
&\leq \int_0^h |D\psi(x+tv) \cdot v| dt \\
&\leq \int_0^h \left| \frac{1}{\varepsilon} Df\left(\frac{x+tv-y}{\varepsilon}\right) \cdot v \right| dt \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^h M dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{Mh}{\varepsilon}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} |\zeta_h| &= \left| g(y) \frac{f\left(\frac{x+hv-y}{\varepsilon}\right) - f\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)}{h} \right| \\ &= \left| g(y) \frac{\psi(x+hv) - \psi(x)}{h} \right| \\ &= |g(y)| \frac{|\psi(x+hv) - \psi(x)|}{|h|} \\ &\leq |g(y)| \frac{Mh}{\varepsilon|h|}. \end{aligned}$$

Portanto, tomando  $\gamma(x) = |g(y)| \frac{Mh}{\varepsilon|h|}$  temos que  $|\zeta_h(x)| \leq \gamma(x)$ , com  $\gamma$  integrável, pois é constante.

Deste modo, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada em (62) e obtemos que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_\varepsilon(x+hv) - g_\varepsilon(x)}{h} &= \frac{1}{\varepsilon^n} \left( \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \frac{f\left(\frac{x+hv-y}{\varepsilon}\right) - f\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)}{h} dy \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{x+hv-y}{\varepsilon}\right) - f\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)}{h} dy \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \frac{1}{\varepsilon^n} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial v} \left( \frac{x-y}{\varepsilon} \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial v}(x-y) dy \\ &= g * \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial v}(x). \end{aligned}$$

Donde temos o desejado.

(2): Seja  $V \subset \mathbb{R}^n$  compacto. Considere  $\varepsilon_1 > 0$  arbitrário e tome  $W = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, V) < \varepsilon_1\}$ . Note que  $V \subset W$ . Além disso, como  $g \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ , então  $g$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^n$  e, logo, continuamente uniforme em  $\mathbb{R}^n$ .

Ou seja, para todo  $\delta > 0$ , existe  $\varepsilon_2(\delta) > 0$  tal que para todo  $x, y \in W$

$$|x - y| < \varepsilon_2 \implies |g(x) - g(y)| < \delta.$$

Seja, então,  $x \in V$  arbitrário e considere  $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ . Note que  $|x - y| < \varepsilon_0 \implies y \in W$  e, portanto,  $|g(x) - g(y)| < \delta$ . Logo, para todo  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , segue-se que

$$\begin{aligned}
|g(x) - g_\varepsilon(x)| &= \left| g(x) - \int_{\mathbb{R}^n} g(y) f_\varepsilon(y - x) dy \right| \\
&= \left| g(x) \int_{\mathbb{R}^n} f^\varepsilon(y - x) dy - \int_{\mathbb{R}^n} g(y) f^\varepsilon(y - x) dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f^\varepsilon(y - x) dy - \int_{\mathbb{R}^n} g(y) f^\varepsilon(y - x) dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f^\varepsilon(y - x) - g(y) f^\varepsilon(y - x) dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (g(x) - g(y)) f^\varepsilon(y - x) dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(x) - g(y)| |f^\varepsilon(y - x)| dy \\
&< \int_{\mathbb{R}^n} \delta |f^\varepsilon(y - x)| dy \\
&= \delta \int_{\mathbb{R}^n} |f^\varepsilon(y - x)| dy \\
&= \delta
\end{aligned}$$

Como  $x \in V$  foi tomado arbitrariamente,  $g_\varepsilon \rightarrow g$  uniformemente em  $V$ ; que também foi tomado arbitrariamente, e, portanto, segue o requerido.  $\square$



# 3

## UMA FÓRMULA DE COMPARAÇÃO PARA A CURVATURA TOTAL DO ENVOLTÓRIO CONVEXO

Nesse capítulo iremos desenvolver as ferramentas necessárias para provarmos o Teorema 4.1, que é o objetivo principal desse trabalho.

### 3.1 REGULARIDADE E PONTOS SINGULARES DA FUNÇÃO DISTÂNCIA

Nesta seção queremos provar uma relação entre a regularidade de uma hipersuperfície e a regularidade da função distância a esta hipersuperfície, e estudaremos uma vizinhança da hipersuperfície para entendermos esta relação.

No restante desta dissertação  $(M, g)$  irá denotar uma variedade Riemanniana completa e conexa com  $\dim(M) \geq 2$ .

**Definição 3.1.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $X \subset M$  um subconjunto de  $M$ . Definimos a **vizinhança tubular com raio  $r$  de  $X$**  como*

$$U_r(X) = d_X^{-1}([0, r]).$$

**Exemplo 3.2.** *Considere  $\gamma$  uma curva em  $\mathbb{R}^2$  cujo traço está na Figura 1. A vizinhança tubular com raio  $r$  de  $\gamma$  está representada na Figura 1.*

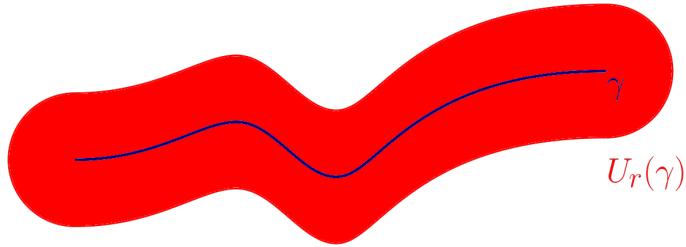


Figura 1: A vizinhança tubular com raio  $r$  de  $\gamma$ .

Independente da regularidade do subconjunto temos que a função distância a este subconjunto é diferenciável em quase todo ponto, como afirma o próximo lema.

**Lema 3.3.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $X \subset M$  um subconjunto de  $M$ . Então  $d_X$  é lipschitz. Em particular,  $d_X$  é diferenciável em quase todo ponto.*

*Demonstração.* Primeiramente, vamos mostrar que  $d_X$  é lipschitz. Sejam  $A, B \subset M$  arbitrários e considere  $a \in A$  e  $b \in B$ . Para cada  $x \in X \subset M$ , temos que

$$d(a, x) \leq d(a, b) + d(b, x) \quad (63)$$

$$d(b, x) \leq d(b, a) + d(a, x) \quad (64)$$

Por (63) temos que

$$\begin{aligned} \inf_{x \in X, a \in A, b \in B} d(a, x) &\leq \inf_{x \in X, a \in A, b \in B} d(a, b) + \inf_{x \in X, a \in A, b \in B} d(b, x) \\ \inf_{x \in X, a \in A} d(a, x) &\leq \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b) + \inf_{x \in X, b \in B} d(b, x) \\ d(A, X) &\leq d(A, B) + d(B, X). \end{aligned} \quad (65)$$

Analogamente, por (64), temos que

$$d(B, X) \leq d(A, B) + d(A, X). \quad (66)$$

Por (65) e (66) temos que

$$|d(A, X) - d(B, X)| \leq d(A, B).$$

Donde temos que  $d_X$  é lipschitz. Segue do Teorema de Rademacher que  $d_X$  é diferenciável em quase todo ponto.  $\square$

**Definição 3.4.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $p \in M$  um ponto de  $M$  e  $X \subset M$  um subconjunto fechado. Dizemos que  $p_0 \in X$  é um **pé da perpendicular de  $p$  em  $X$**  se valem

1.  $d(p, p_0) = d_X(p)$ ;
2. A geodésica minimizante da distância conectando  $p$  e  $p_0$  é única.

Em particular, note que todo ponto de  $X$  é seu próprio pé da perpendicular.

**Exemplo 3.5.** Considere o espaço  $\mathbb{R}^2$  com a métrica Euclidiana e o conjunto  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ . Seja  $p = (0, 2) \in \mathbb{R}^2$  um ponto. Note que o ponto  $p$  possui dois pés da perpendicular no conjunto  $X$ ; que são os pontos  $p_0 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\right)$  e  $\bar{p}_0 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\right)$ . Como ilustra a Figura 2.

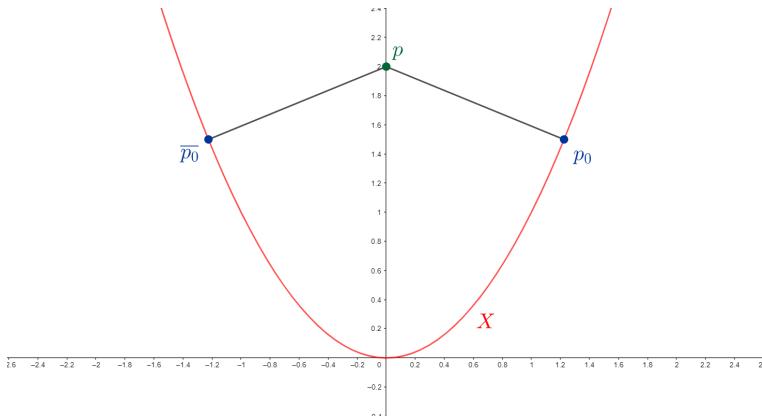


Figura 2: Exemplo dos pés da perpendicular de um ponto sobre um conjunto.

Novamente, o próximo lema nos dá resultados acerca da diferenciabilidade da função distância a um subconjunto independentemente da regularidade do subconjunto.

**Lema 3.6.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $X \subset M$  um subconjunto fechado de  $M$  e  $p \in M \setminus X$ . Então

1.  $d_X$  é diferenciável em  $p$  se, e somente se,  $p$  tem um único pé da perpendicular em  $X$ .
2. Se  $d_X$  é diferenciável em  $p$  então  $\text{grad}(d_X)$  é tangente à geodésica conectando  $p$  a seu pé da perpendicular em  $X$  e  $|\text{grad}(d_X)| = 1$ .
3. Seja  $U \subset M \setminus X$  um aberto onde  $d_X$  é diferenciável pontualmente então  $d_X$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $U$ .

*Demonstração.* (1) Por [CS04, Corolário 3.4.5, p. 67-68] temos que para  $S \subset \mathbb{R}^n$ , um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^n$ , vale que  $d_S$  é diferenciável em  $x \notin S$  se, e somente se,  $x$  tem somente um pé da perpendicular.

Como sistemas de coordenadas preservam as propriedades de funções semicôncavas e derivadas generalizadas por [MM02, Proposição 2.10, p. 5], temos que este resultado estende-se para variedades Riemannianas.

(2) Como  $d_X$  é diferenciável em  $p$ , pelo item (1) do Lema 3.6 temos que  $p$  tem um único pé da perpendicular em  $X$ . Considere  $\gamma$  a geodésica minimizante de  $p$  ao seu pé da perpendicular em  $X$ ,  $N$  o normal para fora dado pela Definição 2.63 e  $\sigma$  a função distância dada pela Definição 2.63.

Pelo Lema 2.65 temos que  $N|_{\gamma(s)} = \gamma'(s)$  e que  $\sigma(p) = d_X(p)$ ; além disso, pelo item (27) do Lema 2.66 temos que  $|N| = 1$ .

O Lema de Gauss generalizado 2.67 garante que  $N = \text{grad}(\sigma)$ .

Portanto, temos que  $\text{grad}(d_X) = N = \gamma'$ , isto é, o gradiente da função distância a um subconjunto é tangente à geodésica que minimiza distância entre  $p$  e seu pé da perpendicular. Além disso,  $|\text{grad}(d_X)| = |N| = 1$ .

(3) Seja  $B \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n \setminus B$  um aberto e  $x \in A$  tal que a função distância ao subconjunto  $B$ ,  $d_B : A \rightarrow \mathbb{R}$ , é diferenciável em  $x$ . Por [CS04, Proposição 3.1.5 item c, p. 51-52] temos que  $D^+d_B(x)$  é não vazio e, em particular,  $D^+d_B(x) = \{Dd_B(x)\}$ , onde  $D^+u(x) = \left\{ p \in \mathbb{R}^n : \limsup_{y \rightarrow x} \frac{u(y) - u(x) - \langle p, y - x \rangle}{|y - x|} \geq 0 \right\}$ .

Por outro lado, por [MM02, Proposição 3.4, p. 9] temos que a função  $d_B$  é semicôncava e como  $D^+d_B(x) = \{Dd_B(x)\}$  para todo  $x \in A$ , temos que, por [CS04, Proposição 3.3.4 item e, p. 57-59],  $d_B$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $A$ .

Assim, concluímos que para  $A \subset \mathbb{R}^n \setminus B$  um aberto onde  $d_B$  é diferenciável pontualmente então  $d_B$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $A$ , isto é, o resultado análogo no caso em que  $M = \mathbb{R}^n$ .

Como sistemas de coordenadas preservam as propriedades de funções semicôncavas e derivadas generalizadas por [MM02, Proposição 2.10, p. 5], temos que este resultado estende-se para variedades Riemannianas.  $\square$

Para não termos problemas de diferenciabilidade da função distância na fronteira de um subconjunto usamos a função distância com sinal, a qual definimos a seguir.

**Definição 3.7.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada em  $M$  tal que  $\Gamma$  limita um domínio  $\Omega$ , isto é, um subconjunto aberto de  $M$ , conexo,

com fecho compacto e  $\partial\Omega = \Gamma$ . Definimos a **distância com sinal**  $d_\Gamma^* : M \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\Gamma$  (com relação a  $\Omega$ ) por

$$d_\Gamma^*(\cdot) = d_\Omega(\cdot) - d_{M \setminus \Omega}(\cdot).$$

De acordo com a Definição 3.7, temos que

$$d_\Gamma^* = \begin{cases} -d_\Gamma(p), & \text{se } p \in \Omega \\ d_\Gamma(p), & \text{se } p \notin \Omega \end{cases}.$$

De fato, notemos que se  $p \in \Omega$  então vale que

$$\begin{aligned} d_\Gamma^*(p) &= d_\Omega(p) - d_{M \setminus \Omega}(p) \\ &= 0 - d_{\partial(M \setminus \Omega)}(p) \\ &= -d_\Gamma(p), \end{aligned}$$

e se  $p \notin \Omega$  vale que

$$\begin{aligned} d_\Gamma^*(p) &= d_\Omega(p) - d_{M \setminus \Omega}(p) \\ &= d_{\partial(\Omega)}(p) - 0 \\ &= d_\Gamma(p). \end{aligned}$$

**Definição 3.8.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada em  $M$ . Chamamos o conjunto de nível  $(d_\Gamma^*)^{-1}(t)$  de **hipersuperfícies paralelas exteriores de  $\Gamma$**  se  $t > 0$ , e **hipersuperfícies paralelas interiores de  $\Gamma$**  se  $t < 0$ .

**Exemplo 3.9.** Considere o espaço  $\mathbb{R}^2$  com a métrica Euclidiana e a esfera  $\mathbb{S}_5^1 \subset \mathbb{R}^2$  de raio 5. A Figura 3 representa a hipersuperfície paralela exterior  $(d_\Gamma^*)^{-1}(2)$  com  $t = 2$  da esfera  $\mathbb{S}_5^1$  e a hipersuperfície paralela interior  $(d_\Gamma^*)^{-1}(-2)$  com  $t = -2$  da esfera  $\mathbb{S}_5^1$ .

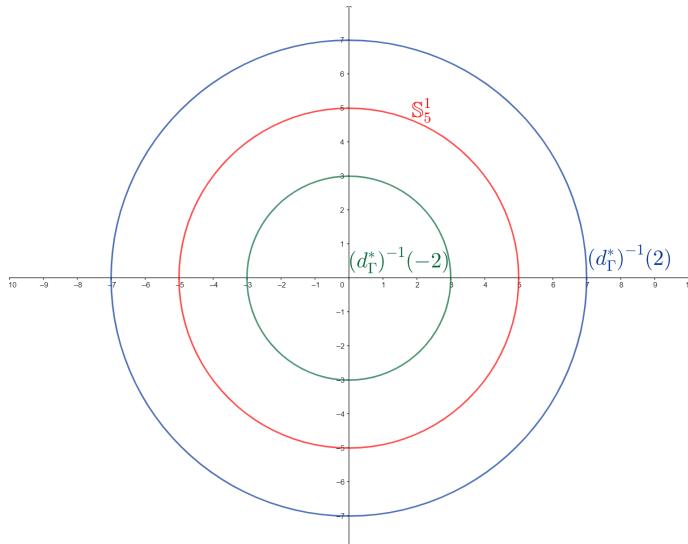


Figura 3: Exemplos de hipersuperfícies paralelas interior e exterior de uma esfera.

A próxima definição nos dará a definição de cut locus de uma hipersuperfície, posteriormente estudaremos qual a relação entre os pontos no cut locus de uma hipersuperfície e os pontos singulares da função distância a uma hipersuperfície.

Além da relação que queremos estabelecer entre a regularidade da hipersuperfície e a regularidade da função distância a esta hipersuperfície, vamos estabelecer também uma regularidade mínima para que a hipersuperfície e o seu cut locus sejam disjuntos.

**Definição 3.10.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada em  $M$ . Defina  $reg(d_{\Gamma}^*)$  a união de todos os conjuntos abertos de  $M$  onde cada ponto tem um único pé da perpendicular em  $\Gamma$ . Definimos assim o **cut locus de  $\Gamma$**  como  $cut(\Gamma) = M \setminus reg(d_{\Gamma}^*)$ .

**Exemplo 3.11.** Considere o espaço  $\mathbb{R}^2$  com a métrica Euclidiana e a elipse  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ . A Figura 4 representa o cut locus de  $\mathcal{E}$ , que é dado pelo segmento que une os focos da elipse  $\mathcal{E}$ .

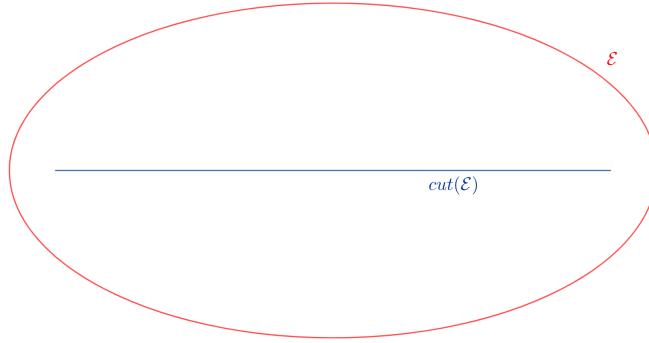


Figura 4: O cut locus de uma elipse.

O próximo lema estabelece uma primeira relação entre a classe de diferenciabilidade da hipersuperfície e a classe de diferenciabilidade da função distância a esta hipersuperfície.

**Lema 3.12.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada em  $M$  tal que  $\Gamma$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  e limita um domínio  $\Omega$  então  $d_\Gamma^*$  é  $\mathcal{C}^1$  em  $M \setminus \text{cut}(\Gamma)$  com  $|\text{grad}(d_\Gamma^*)| = 1$ .*

*Demonastração.* Vamos provar que  $d_\Gamma^*$  é  $\mathcal{C}^1$  em  $M \setminus \text{cut}(\Gamma)$ . Primeiramente, note que

$$M \setminus \text{cut}(\Gamma) = (M \setminus \Gamma) \setminus \text{cut}(\Gamma) \cup (\Gamma \setminus \text{cut}(\Gamma)).$$

Afirmamos que  $d_\Gamma^*$  é  $\mathcal{C}^1$  em  $(M \setminus \Gamma) \setminus \text{cut}(\Gamma)$ .

De fato, como  $\text{cut}(\Gamma)$  é o conjunto dos pontos que tem pelo menos dois pés da perpendicular; segue-se do Lema 3.6 item (1), que  $\text{cut}(\Gamma)$  é o conjunto dos pontos onde  $d_\Gamma^*$  não é diferenciável.

Então, como  $(M \setminus \Gamma) \setminus \text{cut}(\Gamma)$  é um subconjunto aberto em  $M \setminus \Gamma$  onde  $d_\Gamma^*$  é diferenciável, pelo Lema 3.6 item (3), temos que  $d_\Gamma^*$  é  $\mathcal{C}^1$  em  $(M \setminus \Gamma) \setminus \text{cut}(\Gamma)$ , como requerido.

Assim, basta verificar que  $d_\Gamma^*$  é  $\mathcal{C}^1$  em  $\Gamma \setminus \text{cut}(\Gamma)$ .

De fato, seja  $p \in \Gamma \setminus \text{cut}(\Gamma)$  arbitrário e considere  $U$  uma vizinhança aberta e conexa de  $p$  em  $M$  que é disjunta de  $\text{cut}(\Gamma)$ . Note que tal vizinhança existe pois  $M \setminus \text{cut}(\Gamma) = M \setminus (M \setminus \text{reg}(d_\Gamma^*)) = \text{reg}(d_\Gamma^*)$  e  $\text{reg}(d_\Gamma^*)$  é uma reunião de abertos, portanto, aberto.

Como  $U$  é disjunto de  $\text{cut}(\Gamma)$ , cada ponto de  $U$  tem um único pé da perpendicular em  $\Gamma \cap U$ , pois se existisse um ponto em  $U$  com dois pés da perpendicular em  $\Gamma \cap U$ , tal ponto teria dois pés da perpendicular em  $\Gamma$  e, portanto, pertenceria a  $\text{cut}(\Gamma)$ , o que é uma contradição, pois  $U$  e  $\text{cut}(\Gamma)$  são disjuntos por construção; e, então,  $U$  é fibrado por segmentos de geodésicas ortogonais a  $\Gamma \cap U$ .

Seja  $\Gamma_\varepsilon = (d_\Gamma^*)^{-1}(\varepsilon)$ , onde  $\varepsilon > 0$  é tal que  $\Gamma_\varepsilon \cap U \neq \emptyset$ . Note que cada ponto em  $\Gamma_\varepsilon \cap U$  tem um único pé de perpendicular em  $\Gamma \cap U$ , pois  $\Gamma_\varepsilon \cap U \subset U$  e cada ponto de  $U$  tem um único pé da perpendicular em  $\Gamma \cap U$ , então, em particular, cada ponto de  $\Gamma_\varepsilon \cap U$  tem um único pé da perpendicular em  $\Gamma \cap U$ .

Primeiramente note que  $U \setminus \Gamma$  é um subconjunto aberto (pois  $\Gamma$  é fechada e  $U$  é aberto) de  $M \setminus \Gamma$  onde  $d_\Gamma^*$  é diferenciável pontualmente, pois cada ponto de  $U$ , em particular  $U \setminus \Gamma$ , tem um único pé da perpendicular em  $U \cap \Gamma$  e pelo Lema 3.6 item (1) segue-se que  $d_\Gamma^*$  é diferenciável pontualmente. Portanto, pelo Lema 3.6 item (3) temos que  $d_\Gamma^*$  é  $\mathcal{C}^1$  em  $U \setminus \Gamma$ .

Logo, como  $d_\Gamma^*$  é  $\mathcal{C}^1$  em  $U \setminus \Gamma$  segue-se, pelo Teorema da Função Implícita, que  $\Gamma_\varepsilon \cap U$  é uma hipersuperfície.

Note também que  $\Gamma_\varepsilon \cap U$  é ortogonal aos segmentos de geodésica que fibram  $U$ , pois pelo Lema 3.6 item (2)  $\text{grad}(d_\Gamma^*)$  é tangente a tais segmentos de geodésicas e, além disso,  $\text{grad}(d_\Gamma^*)$  é ortogonal a  $\Gamma_\varepsilon \cap U$ . Por outro lado, temos que esses segmentos não intersectam uns aos outros, pois caso eles se intersectassem teríamos um ponto (a intersecção) em  $U$  com dois pés da perpendicular em  $\Gamma \cap U$ , o que é uma contradição, portanto segue-se que  $U$  é disjunto de  $\text{cut}(\Gamma_\varepsilon)$ . Assim  $d_{\Gamma_\varepsilon}^*$  é diferenciável pontualmente em  $U \setminus \Gamma_\varepsilon$  e pelo Lema 3.6 item (3),  $d_{\Gamma_\varepsilon}^*$  é  $\mathcal{C}^1$  em  $U \setminus \Gamma_\varepsilon$ .

Agora, note que  $d_\Gamma^*(p) = d_{\Gamma_\varepsilon}^*(p) + \varepsilon$ , para todo  $p \in U$ .

De fato, temos três possibilidades, vamos analisá-las separadamente. Primeiramente, denotemos por  $\bar{\Omega} \subset M$  o conjunto tal que  $\Gamma_\varepsilon = \partial \bar{\Omega}$ .

- Considere  $p \in U$  tal que  $p \notin \bar{\Omega}$  e  $p \notin \Omega$ . Seja  $p_0 \in \Gamma_\varepsilon$  o pé da perpendicular de  $p$  em  $\Gamma_\varepsilon$ . Logo

$$\begin{aligned} d_{\Gamma_\varepsilon}^*(p) &= d_{\bar{\Omega}}(p) - d_{M \setminus \bar{\Omega}}(p) \\ &= d_{\bar{\Omega}}(p) \\ &= d_\Omega(p) - d_\Omega(p_0). \end{aligned}$$

Mas como  $d_\Gamma^*(p) = d_\Omega(p) - d_{M \setminus \Omega}(p) = d_\Omega(p)$  e  $d_\Gamma^*(p_0) = d_\Omega(p_0) - d_{M \setminus \Omega}(p_0) = d_\Omega(p_0)$  temos que

$$\begin{aligned} d_{\Gamma_\varepsilon}^*(p) &= d_\Omega(p) - d_\Omega(p_0) \\ &= d_\Gamma^*(p) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Consequentemente,  $d_\Gamma^*(p) = d_{\Gamma_\varepsilon}^*(p) + \varepsilon$ .

- Considere  $p \in U$  tal que  $p \in \bar{\Omega}$  e  $p \notin \Omega$ . Seja  $p_0 \in \Gamma_\varepsilon$  o pé da perpendicular de  $p$  em  $\Gamma_\varepsilon$ . Logo

$$\begin{aligned}
d_{\Gamma_\varepsilon}^*(p) &= d_{\bar{\Omega}}(p) - d_{M \setminus \bar{\Omega}}(p) \\
&= -d_{M \setminus \bar{\Omega}}(p) \\
&= -(d_{\Omega}(p_0) - d_{\Omega}(p)) \\
&= d_{\Omega}(p) - d_{\Omega}(p_0).
\end{aligned}$$

Mas como  $d_{\Gamma}^*(p) = d_{\Omega}(p) - d_{M \setminus \Omega}(p) = d_{\Omega}(p)$  e  $d_{\Gamma}^*(p_0) = d_{\Omega}(p_0) - d_{M \setminus \Omega}(p_0) = d_{\Omega}(p_0)$  temos que

$$\begin{aligned}
d_{\Gamma_\varepsilon}^*(p) &= d_{\Omega}(p) - d_{\Omega}(p_0) \\
&= d_{\Gamma}^*(p) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Consequentemente,  $d_{\Gamma}^*(p) = d_{\Gamma_\varepsilon}^*(p) + \varepsilon$ .

- Considere  $p \in U$  tal que  $p \in \bar{\Omega}$  e  $p \in \Omega$ . Seja  $p_0 \in \Gamma_\varepsilon$  o pé da perpendicular de  $p$  em  $\Gamma_\varepsilon$ . Logo

$$\begin{aligned}
d_{\Gamma_\varepsilon}^*(p) &= d_{\bar{\Omega}}(p) - d_{M \setminus \bar{\Omega}}(p) \\
&= -d_{M \setminus \bar{\Omega}}(p) \\
&= -(d_{M \setminus \Omega}(p) + d_{\Omega}(p_0)) \\
&= -d_{M \setminus \Omega}(p) - d_{\Omega}(p_0).
\end{aligned}$$

Mas como  $d_{\Gamma}^*(p) = d_{\Omega}(p) - d_{M \setminus \Omega}(p) = -d_{M \setminus \Omega}(p)$  e  $d_{\Gamma}^*(p_0) = d_{\Omega}(p_0) - d_{M \setminus \Omega}(p_0) = d_{\Omega}(p_0)$  temos que

$$\begin{aligned}
d_{\Gamma_\varepsilon}^*(p) &= -d_{M \setminus \Omega}(p) - d_{\Omega}(p_0) \\
&= d_{\Gamma}^*(p) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Consequentemente,  $d_{\Gamma}^*(p) = d_{\Gamma_\varepsilon}^*(p) + \varepsilon$ .

Portanto,  $d_{\Gamma}^*$  é  $\mathcal{C}^1$  em  $p \in \Gamma \setminus \text{cut}(\Gamma)$ ; como tal  $p \in \Gamma \setminus \text{cut}(\Gamma)$  foi tomado arbitrariamente, segue o requerido.

Note que  $|\text{grad}(d_{\Gamma}^*)| = 1$  segue diretamente do Lema 3.6 item (2).  $\square$

Como queremos estudar como a classe de diferenciabilidade da hipersuperfície interfere na intersecção da própria hipersuperfície com o seu cut locus. Assim, se  $\Gamma$  é de

classe  $\mathcal{C}^1$ , podemos ter que  $\Gamma$  e  $cut(\Gamma)$  sejam não disjuntos. De fato, considere o espaço  $\mathbb{R}^2$  com a métrica Euclidiana e  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|^{\frac{3}{2}}\}$ . Note que  $\Gamma$  é de classe  $\mathcal{C}^1$ .

De fato, considere  $f(x) = |x|^{\frac{3}{2}}$  e note que

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2\sqrt{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Além disso,  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ . Donde segue-se que  $f \in \mathcal{C}^1$  e, portanto,  $\Gamma$  é de classe  $\mathcal{C}^1$ . Note também que  $cut(\Gamma) = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ , logo  $\Gamma \cap cut(\Gamma) = \{(0, 0)\}$ .

Por outro lado, provaremos a seguir que  $\Gamma$  ser de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$  é uma condição necessária e suficiente para que tenhamos uma vizinhança de  $\Gamma$  onde cada ponto tem um único pé da perpendicular em  $\Gamma$ . Em particular, teremos que  $\Gamma \cap cut(\Gamma) = \emptyset$ . Além disso, nesse caso,  $d_{\Gamma}^*$  é de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$ .

Voltando ao contra-exemplo apresentado note que  $\Gamma$  não é de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$ .

De fato, considere  $f(x) = |x|^{\frac{3}{2}}$  e note que

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2\sqrt{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Vamos mostrar que  $f'$  não é Lipschitziana. Seja  $0 < x < 1$  arbitrário e observemos que

$$\begin{aligned} |f'(x) - f'(-x)| &= \left| \frac{3x}{2\sqrt{|x|}} - \frac{3(-x)}{2\sqrt{|(-x)|}} \right| \\ &= \left| \frac{3}{2} (\sqrt{x} + \sqrt{-x}) \right| \\ &= 3\sqrt{x} \\ &> \frac{3}{2} |2x| \\ &= \frac{3}{2} |x - (-x)|. \end{aligned}$$

Logo, segue o desejado.

A seguir faremos algumas definições sobre subconjuntos de uma variedade Riemanniana que estão relacionados a uma hipersuperfície, como o eixo medial ou o esqueleto. Posteriormente apresentamos um lema que relaciona estes conjuntos apresentados.

**Definição 3.13.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada em  $M$ . Definimos o **eixo medial de  $\Gamma$**  como o conjunto de pontos em  $M$  com múltiplos pés de perpendicular em  $\Gamma$ . Denotamos-o por  $medial(\Gamma)$ .*

Afirmamos que

$$cut(\Gamma) = cl(medial(\Gamma)). \quad (67)$$

De fato, sejam  $A_\lambda \subset M, \lambda \in L \subset \mathbb{N}$ , abertos onde cada ponto tem um único pé de perpendicular. Primeiramente, note que  $reg(d_\Gamma^*) = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ . Além disso, pelo Lema 3.6 item (1), temos que  $A_\lambda$  é o conjunto dos pontos onde  $d_\Gamma^*$  é diferenciável. Assim, por definição,  $M \setminus A_\lambda$  é um conjunto fechado que contém  $medial(\Gamma)$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} cut(\Gamma) &= M \setminus reg(d_\Gamma^*) \\ &= M \setminus \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \\ &= \bigcap_{\lambda \in L} M \setminus A_\lambda \\ &= cl(medial(\Gamma)). \end{aligned}$$

**Exemplo 3.14.** Considere o espaço  $\mathbb{R}^2$  com a métrica Euclidiana e a elipse  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ . O eixo medial da elipse  $\mathcal{E}$  é dado pelo segmento que une os focos da elipse  $\mathcal{E}$  sem os focos.

**Definição 3.15.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada em  $M$ . Denotamos por  $sing(d_\Gamma^*)$  o conjunto dos pontos singulares de  $d_\Gamma^*$  ou pontos de  $M$  onde  $d_\Gamma^*$  não é diferenciável.

Afirmamos que  $medial(\Gamma) = sing(d_\Gamma^*)$  como consequência direta do Lema 3.6 item (1) e, consequentemente,  $cut(\Gamma) = cl(sing(d_\Gamma^*))$

**Definição 3.16.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada em  $M$  tal que  $\Gamma$  limita um domínio  $\Omega$ . Dizemos que uma esfera geodésica  $S \subset cl(\Omega)$  é uma **esfera geodésica maximal** se ela não está contida numa esfera geodésica de raio maior contida em  $cl(\Omega)$ . Definimos também o **esqueleto de  $\Omega$**  como o conjunto dos centros das esferas maximais contidas em  $cl(\Omega)$  e denotamos-o por  $skeleton(\Omega)$ .

**Exemplo 3.17.** Seja  $\gamma$  uma curva fechada em  $\mathbb{R}^2$  cujo traço está na figura 5. Note que  $\gamma$  é uma hipersuperfície que limita um domínio  $\Omega$ . A Figura 5 representa uma esfera geodésica maximal  $S$  e o esqueleto de  $\gamma$ .

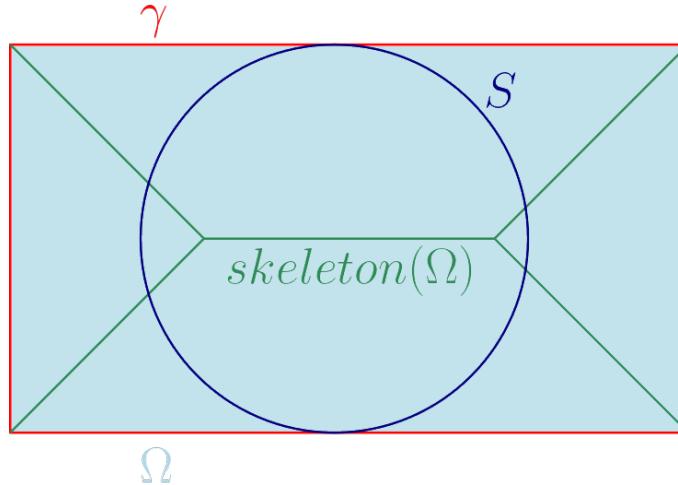


Figura 5: Uma esfera geodésica maximal e o esqueleto de uma hipersuperfície.

**Lema 3.18.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\Gamma$  uma hipersuperfície mergulhada em  $M$  de modo que  $\Gamma$  limita um domínio  $\Omega$  tal que todo par de pontos em  $\Omega$  é conectado por uma única geodésica em  $M$ . Assim,*

$$\text{medial}(\Gamma) \cap \Omega \subset \text{skeleton}(\Omega) \subset \text{cl}(\text{medial}(\Gamma) \cap \Omega).$$

*Demonstração.* **medial( $\Gamma$ )  $\cap$   $\Omega$   $\subset$  skeleton( $\Omega$ )**

Seja  $x \in \text{medial}(\Gamma) \cap \Omega$ . Então, por definição,  $x$  tem pelo menos dois pés da perpendicular em  $\Gamma$ , sejam  $y, y' \in \Gamma$  tais pés da perpendicular de  $x$  em  $\Gamma$ . Como  $d(x, y) = d(x, y')$  considere  $S_x$  a esfera geodésica de centro  $x$  que passa por  $y$  e  $y'$ .

Suponha que existe uma esfera  $S' \subset \text{cl}(\Omega)$  tal que  $S'$  contém  $S_x$ . Note que  $y, y' \in S'$ , pois como  $S'$  contém  $S$ , se  $y$  e  $y'$  não estiverem em  $S'$  teríamos que existiria pelo menos um ponto  $z \in S'$  tal que  $z \notin \text{cl}(\Omega)$ , o que não é possível pois  $S' \subset \text{cl}(\Omega)$ . Considere então duas geodésicas  $\gamma$  e  $\gamma'$  em  $\text{cl}(\Omega)$  que se iniciam em  $y, y'$ , respectivamente, e são ortogonais a  $S$ . Tais geodésicas se encontram em  $x$  pela primeira vez, pois, por hipótese, todo par de pontos em  $\Omega$  é conectado por uma única geodésica em  $M$ . Mas  $\gamma$  e  $\gamma'$  também são ortogonais a  $S'$ , pois, novamente, se não fossem existiria um ponto  $z \in S'$  tal que  $z \notin \text{cl}(\Omega)$ . Portanto,  $x$  é o centro de  $S'$  também. Consequentemente,  $S_x = S'$ , donde temos que  $S_x$  é maximal. Logo,  $x \in \text{skeleton}(\Omega)$ .

**skeleton( $\Omega$ )  $\subset$  cl(medial( $\Gamma$ )  $\cap$   $\Omega$ )**

Seja  $x \in \text{skeleton}(\Omega)$ . Então existe uma esfera maximal  $S \in \text{cl}(\Omega)$  com centro em  $x$ . Por (67), é suficiente mostrar que  $x \in \text{cut}(\Gamma)$ . Suponha, por absurdo, que  $x \notin \text{cut}(\Gamma)$ . Então, pelo Lema 3.6 item (3),  $d_\Gamma$  é  $\mathcal{C}^1$  em uma vizinhança  $U$  de  $x$ . Além disso, pelo mesmo

Lema item (2),  $\text{grad}(d_\Gamma) \neq 0$  em  $U$  e suas curvas integrais são geodésicas minimizantes que conectam os pontos de  $U$  com seus únicos pés de perpendicular em  $\Gamma$ .

Disto segue que a geodésica que conecta  $x$  ao seu pé da perpendicular em  $\Gamma$  pode ser estendida para uma geodésica maior. Isso contradiz a maximalidade de  $S$ .  $\square$

A fim de querer obter relações entre a classe de diferenciabilidade de uma hipersuperfície e a classe de diferenciabilidade da função distância a essa hipersuperfície apresentamos o próximo lema. Este lema ainda não apresenta o melhor resultado possível, isto é, podemos refinar as classes de diferenciabilidade apresentadas nele e o faremos adiante.

**Lema 3.19.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana com  $g$  de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 2$ , e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada em  $M$  tal que  $\Gamma$  limita um domínio  $\Omega$ . Se  $\Gamma$  é  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 2$ , então  $d_\Gamma^*$  é  $\mathcal{C}^k$  em  $M \setminus \text{cut}(\Gamma)$ .*

*Demonstração.* Primeiramente note que como  $\Gamma$  é de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 2$ , temos, em particular, que  $\Gamma$  é de classe  $\mathcal{C}^1$ . Pelo Lema 3.12 temos que  $d_\Gamma^*$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $M \setminus \text{cut}(\Gamma)$ . Em particular, pelo Lema 3.6 item (1) temos que cada ponto de  $M \setminus \text{cut}(\Gamma)$  tem único pé da perpendicular em  $\Gamma$ .

Sejam  $U = E(V)$  uma vizinhança normal de  $\Gamma$  em  $M$ ,  $p \in M \setminus \text{cut}(\Gamma)$  arbitrário e  $p_0$  o seu pé da perpendicular em  $\Gamma$ ,  $(x_1, \dots, x_n)$  um sistema de cartas coordenadas de Fermi centrado em  $p_0$  e  $E_n$  a seção ortonormal de  $N\Gamma$ . Para  $(q, v) \in V$ , com  $v = v_n E_n|_q$ , temos que  $x_n$  é dado por

$$x_n \left( E \left( q, v_n E_n|_q \right) \right) = v_n.$$

Assim, como  $p \in M \setminus \text{cut}(\Gamma)$  tem um único pé da perpendicular em  $\Gamma$ , temos pelo Lema 2.65 que

$$d_\Gamma(p) = \sigma(p),$$

onde  $\sigma^2 = x_n^2$ .

Logo, como  $g$  é de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 2$ , segue do Teorema de dependência diferenciável dos parâmetros de EDO's que a aplicação exponencial normal de  $\Gamma$  em  $M$  é de classe  $\mathcal{C}^k$ , com  $k \geq 2$ .

Disso segue-se que  $x_n$ ,  $\sigma$  e, consequentemente,  $d_\Gamma$  são de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 2$ , em  $M \setminus \text{cut}(\Gamma)$ .

Portanto,

$$d_\Gamma^* = \begin{cases} -d_\Gamma(p), & \text{se } p \in \Omega \\ d_\Gamma(p), & \text{se } p \notin \Omega \end{cases}.$$

é de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 2$ , em  $M \setminus \text{cut}(\Gamma)$ .  $\square$

**Definição 3.20.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada em  $M$ . Definimos  $\text{reach}(\Gamma) = d(\Gamma, \text{cut}(\Gamma)) (= \inf\{d(x, y) : x \in \Gamma, y \in \text{cut}(\Gamma)\})$ .

Pela Definição 3.20 temos que  $\text{reach}(\Gamma) \geq r > 0$  se, e somente se, existe uma bola geodésica de raio  $r$  rolando livremente em cada lado de  $\Gamma$  em  $M$ , isto é, para cada ponto  $p \in \Gamma$  passam as fronteiras de duas bolas geodésicas  $B, B'$  de raio  $r$  tais que  $B \subset \text{cl}(\Omega)$ , e  $B' \subset M \setminus \Omega$ .

**Definição 3.21.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  e  $k \geq 1$ . Dizemos que uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $\mathcal{C}^{k,\alpha}$  em  $\Omega$  se  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^k$  em  $\Omega$  e o seguinte supremo é finito

$$\sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Da Definição 3.21 temos, em particular, que se uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$  então  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  e sua diferencial é Lipschitz. De fato, considere o supremo dado na Definição 3.21 igual a  $L \in \mathbb{R}$ . Assim, para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , tomando a norma do máximo em  $\mathbb{R}^n$ , temos que

$$\sup_{\substack{a \neq b \\ a, b \in \mathbb{R}^n}} \frac{|f'(a) - f'(b)|}{|a - b|} = L \implies |f'(x) - f'(y)| \leq L|x - y|.$$

Agora podemos definir uma hipersuperfície de classe  $\mathcal{C}^{k,\alpha}$  tanto para hipersuperfícies de  $\mathbb{R}^n$  quanto para hipersuperfícies de uma variedade Riemannina.

**Definição 3.22.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio e  $\Gamma = \partial\Omega$ . Dizemos que  $\Omega$  e  $\Gamma$  são de classe  $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  e  $k \geq 1$ , se cada ponto de  $\Gamma$  tem uma vizinhança  $U$  de modo que  $\Gamma \cap U$  é o gráfico de uma função de classe  $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ .

**Definição 3.23.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada em  $M$ . Dizemos que  $\Gamma$  é  $\mathcal{C}^{1,1}$ , se ela é  $\mathcal{C}^{1,1}$  em cartas locais, isto é, para cada  $p \in M$  existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $M$  e um difeomorfismo  $\mathcal{C}^\infty \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\phi(\Gamma \cap U)$  é  $\mathcal{C}^{1,1}$  em  $\mathbb{R}^n$ . Uma função  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada localmente  $\mathcal{C}^{1,1}$  em alguma região  $X$ , se  $u$  é  $\mathcal{C}^{1,1}$  em uma cobertura de  $X$  por cartas locais. Se  $X$  é compacto, então dizemos que  $u$  é  $\mathcal{C}^{1,1}$  próximo a  $X$ .

O próximo lema nos da uma equivalência que relaciona a classe de diferenciabilidade da hipersuperfície, com seu *reach* e a classe de diferenciabilidade da função distância a esta hipersuperfície; que é o resultado que buscávamos desde o começo da seção.

**Lema 3.24.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada em  $M$  tal que  $\Gamma$  limita um domínio  $\Omega$ , isto é,  $\partial\Omega = \Gamma$ . As seguintes condições são equivalentes:*

1.  $\text{reach}(\Gamma) > 0$ .
2.  $\Gamma$  é  $\mathcal{C}^{1,1}$ .
3.  $d_{\Gamma}^*$  é  $\mathcal{C}^{1,1}$  próximo a  $\Gamma$ .

*Demonstração.* (1)  $\Rightarrow$  (2)

Segue diretamente de [Lyto5, Proposição 1.4, p. 203].

(2)  $\Rightarrow$  (1)

Por [Alb15, Teorema 1.6, p. 401 e p. 404-405] temos, em particular, que  $\text{cut}(\Gamma) \subset \subset M \setminus \Gamma$ . Como  $\Gamma$  é fechado temos que  $d(\Gamma, \text{cut}(\Gamma)) > 0$ , isto é,  $\text{reach}(\Gamma) > 0$ .

(3)  $\Rightarrow$  ((1)  $\vee$  (2))

Seja  $p \in \Gamma$  e  $U$  uma vizinhança de  $p$  em  $M$  tal que  $u = d_{\Gamma}^*$  é  $\mathcal{C}^{1,1}$  em  $U$ . Note que tais  $p \in \Gamma$  e  $U$  existem por hipótese.

Pelo Lema 3.6 item (2),  $|\text{grad}(u)| = 1$  em  $U \setminus \Gamma$ .

Seja  $X \in T_p M$  tal que  $X \perp Y, \forall Y \in T_p \Gamma$  e  $|X(p)| = 1$ . Considere a geodésica  $\gamma$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = X(p)$ . Tomemos  $p_n = \gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ . Pelo Lema 3.6 item (2) temos que  $\gamma'\left(\frac{1}{k}\right) = \text{grad}(u)(p_k), \forall k \in \mathbb{N}$ . Como  $u = d_{\Gamma}^*$  é  $\mathcal{C}^{1,1}$  em  $U$ , em particular, segue-se que

$$\begin{aligned}
 |\text{grad}(u)(p)| &= \left| \text{grad}(u)\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n\right) \right| \\
 &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \text{grad}(u)(p_n) \right| \\
 &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma'\left(\frac{1}{n}\right) \right| \\
 &= \left| \gamma'\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right) \right| \\
 &= |\gamma'(0)| \\
 &= |X(p)| \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Portanto,  $|\text{grad}(u)| \neq 0$  em  $U$ . Em particular,  $\Gamma \cap U$  é um conjunto de nível regular de  $u$ , e é  $\mathcal{C}^1$  pelo Teorema da aplicação inversa.

Seja  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo. Então  $\phi(\Gamma \cap U)$  é um conjunto de nível regular de uma função  $u \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Como  $u \circ \phi^{-1}$  é localmente  $\mathcal{C}^{1,1}$  temos que  $\phi(\Gamma \cap U)$  é localmente  $\mathcal{C}^{1,1}$  em  $\mathbb{R}^n$ . Portanto,  $\Gamma$  é localmente  $\mathcal{C}^{1,1}$ .

$$((1) \vee (2)) \implies (3)$$

Seja  $p \in \Gamma$  e  $U$  uma vizinhança de  $p$  em  $M$  tal que cada ponto de  $U$  tem um único pé da perpendicular em  $\Gamma$ , note que tal vizinhança de  $p$  existe pois  $\text{reach}(\Gamma) > 0$ . Além disso, como  $\Gamma$  é  $\mathcal{C}^{1,1}$  por hipótese, em particular, é  $\mathcal{C}^1$ . Logo, pelo Lema 3.12,  $u$  é  $\mathcal{C}^1$  em  $M \setminus \text{cut}(\Gamma)$ . Portanto,  $u$  é  $\mathcal{C}^1$  em  $U$ , pois  $U$  e  $\text{cut}(\Gamma)$  são disjuntos por construção.

Seja  $\Gamma_\varepsilon = u^{-1}(\varepsilon)$ , onde  $\varepsilon > 0$  é tal que  $\Gamma_\varepsilon \cap U \neq \emptyset$ . Note que cada ponto em  $\Gamma_\varepsilon \cap U$  tem um único pé de perpendicular em  $\Gamma \cap U$ , pois  $\Gamma_\varepsilon \cap U \subset U$  e cada ponto de  $U$  tem um único pé da perpendicular em  $\Gamma \cap U$ , então, em particular, cada ponto de  $\Gamma_\varepsilon \cap U$  tem um único pé da perpendicular em  $\Gamma \cap U$ . Portanto,  $\text{reach}(\Gamma_\varepsilon \cap U) > 0$  e, logo,  $\Gamma_\varepsilon \cap U$  é  $\mathcal{C}^{1,1}$ .

Seja  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo e note que temos uma fibração de  $\mathbb{R}^n$  por hipersuperfícies  $\mathcal{C}^{1,1}$  dadas pelos conjuntos de nível de  $u \circ \phi^{-1}$ .

Como  $\frac{\text{grad}(u \circ \phi^{-1})}{|\text{grad}(u \circ \phi^{-1})|}$  é ortogonal a esses conjuntos de nível  $\mathcal{C}^{1,1}$ , segue que  $\text{grad}(u \circ \phi^{-1})$  é localmente lipschitz.

De fato, sejam  $x_1, x_2 \in \phi(U)$  e note que como temos uma fibração de  $\mathbb{R}^n$  por hipersuperfícies  $\mathcal{C}^{1,1}$  dadas pelos conjuntos de nível de  $u \circ \phi^{-1}$  existem  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  tais que  $x_1 \in (u \circ \phi^{-1})^{-1}(\varepsilon_1)$  e  $x_2 \in (u \circ \phi^{-1})^{-1}(\varepsilon_2)$ , onde  $(u \circ \phi^{-1})^{-1}(\varepsilon_i)$ ,  $i = 1, 2$ , são hipersuperfícies de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$ .

Considere  $(x_2)_0$  o pé da perpendicular de  $x_2$  em  $(u \circ \phi^{-1})^{-1}(\varepsilon_1)$ . Note que a geodésica minimizante da distância conectando  $x_2$  a  $(x_2)_0$  é uma reta, pois  $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ . Logo,  $\frac{\text{grad}(u \circ \phi^{-1})}{|\text{grad}(u \circ \phi^{-1})|}(x_2) = \frac{\text{grad}(u \circ \phi^{-1})}{|\text{grad}(u \circ \phi^{-1})|}((x_2)_0)$ , pois  $\frac{\text{grad}(u \circ \phi^{-1})}{|\text{grad}(u \circ \phi^{-1})|}((x_2)_0)$  e  $\frac{\text{grad}(u \circ \phi^{-1})}{|\text{grad}(u \circ \phi^{-1})|}(x_2)$  são tangentes à geodésica minimizante da distância conectando  $x_2$  a  $(x_2)_0$ , que é uma reta, portanto, o vetor tangente é constante.

Consequentemente, comparar  $\frac{\text{grad}(u \circ \phi^{-1})}{|\text{grad}(u \circ \phi^{-1})|}$  em  $x_1$  e  $x_2$  é análogo a comparar em  $x_1$  e  $(x_2)_0$ , isto é,

$$\left| \frac{\text{grad}(u \circ \phi^{-1})}{|\text{grad}(u \circ \phi^{-1})|}(x_1) - \frac{\text{grad}(u \circ \phi^{-1})}{|\text{grad}(u \circ \phi^{-1})|}(x_2) \right| = \left| \frac{\text{grad}(u \circ \phi^{-1})}{|\text{grad}(u \circ \phi^{-1})|}(x_1) - \frac{\text{grad}(u \circ \phi^{-1})}{|\text{grad}(u \circ \phi^{-1})|}((x_2)_0) \right|.$$

Mas como  $(u \circ \phi^{-1})^{-1}(\varepsilon_1)$  é uma hipersuperfície de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$  e  $\frac{\text{grad}(u \circ \phi^{-1})}{|\text{grad}(u \circ \phi^{-1})|}$  é ortogonal a hipersuperfície  $(u \circ \phi^{-1})^{-1}(\varepsilon_1)$  em  $x_1$  e  $(x_2)_0$ , temos que existe  $L \geq 0$  tal que

$$\left| \frac{\text{grad}(u \circ \phi^{-1})}{|\text{grad}(u \circ \phi^{-1})|}(x_1) - \frac{\text{grad}(u \circ \phi^{-1})}{|\text{grad}(u \circ \phi^{-1})|}(x_2) \right| \leq L|x_1 - x_2|.$$

Consequentemente,  $u \circ \phi^{-1}$  é localmente  $\mathcal{C}^{1,1}$  e  $d_\Gamma^*$  é  $\mathcal{C}^{1,1}$  próximo a  $\Gamma$ .  $\square$

A partir do Lema 3.24 podemos obter os seguintes resultados.

**Proposição 3.25.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada em  $M$  tal que  $\Gamma$  limita um domínio  $\Omega$ , isto é,  $\partial\Omega = \Gamma$ . Então  $d_\Gamma^*$  é localmente  $\mathcal{C}^{1,1}$  em  $M \setminus \text{cut}(\Gamma)$ . Em particular se  $\Gamma$  é  $\mathcal{C}^{1,1}$ , então  $d_\Gamma^*$  é localmente  $\mathcal{C}^{1,1}$  em  $U_r(\Gamma)$  para  $r = \text{reach}(\Gamma)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $p \in M \setminus \text{cut}(\Gamma)$  e  $\Gamma_p = (d_\Gamma^*)^{-1}(d_\Gamma^*(p))$ . Note que  $\Gamma_p \cap (M \setminus \text{cut}(\Gamma)) \neq \emptyset$ , pois  $p \in \Gamma_p$  e  $p \in M \setminus \text{cut}(\Gamma)$ .

Por outro lado, cada ponto em  $\Gamma_p \cap (M \setminus \text{cut}(\Gamma))$  tem um único pé de perpendicular em  $\Gamma \cap (M \setminus \text{cut}(\Gamma))$ , pois  $\Gamma_p \cap (M \setminus \text{cut}(\Gamma)) \subset M \setminus \text{cut}(\Gamma)$  e cada ponto de  $M \setminus \text{cut}(\Gamma)$  tem um único pé da perpendicular em  $\Gamma \cap (M \setminus \text{cut}(\Gamma))$ , então, em particular, cada ponto de  $\Gamma_p \cap (M \setminus \text{cut}(\Gamma))$  tem um único pé da perpendicular em  $\Gamma \cap (M \setminus \text{cut}(\Gamma))$ . Portanto,  $\text{reach}(\Gamma_p \cap (M \setminus \text{cut}(\Gamma))) > 0$  e, pelo Lema 3.24,  $d_{\Gamma_p}^*$  é  $\mathcal{C}^{1,1}$  próximo a  $p$ .

Agora, note que  $d_\Gamma^* = d_{\Gamma_p}^* + d_\Gamma^*(p)$  em  $M \setminus \text{cut}(\Gamma)$ . Portanto,  $d_\Gamma^*$  é  $\mathcal{C}^{1,1}$  em  $p \in M \setminus \text{cut}(\Gamma)$ ; como tal  $p \in M \setminus \text{cut}(\Gamma)$  foi tomado arbitrariamente, segue o requerido.  $\square$

**Proposição 3.26.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada em  $M$  tal que  $\Gamma$  limita um domínio  $\Omega$  e  $\text{reach}(\Gamma) = r > 0$ . Considere que  $K_M \geq -C$ , para  $C \geq 0$ , em  $U_r(\Gamma)$ . Então, para  $\delta = \frac{r}{2}$ ,*

$$|\text{Hess}(d_\Gamma^*)| \leq \sqrt{C} \coth(\sqrt{C}\delta)$$

em quase todo ponto de  $U_\delta(\Gamma)$ .

*Demonstração.* Pela Proposição 3.25 e o Teorema de Rademacher,  $d_\Gamma^*$  é duas vezes diferenciável em quase todo ponto de  $U_\delta(\Gamma)$ .

Seja  $p \in U_\delta(\Gamma)$  um ponto arbitrário tal que  $d_\Gamma^*$  é duas vezes diferenciável em  $p$  e considere  $\Gamma_p = (d_\Gamma^*)^{-1}(d_\Gamma^*(p))$ .

Então os autovalores de  $\text{Hess}(d_\Gamma^*)(p)$ , a menos para aquele na direção de  $\text{grad}(d_\Gamma^*)(p)$ , que se anula, são as curvaturas principais para o conjunto de nível  $\Gamma_p$ .

Como, por hipótese,  $\text{reach}(\Gamma) = r > 0$  temos que uma bola de raio  $r$  rola livremente em cada lado de  $\Gamma$ . Portanto uma bola de raio  $\delta = \frac{r}{2}$  rola livremente em cada lado de  $\Gamma_p$ .

Afirmamos que as curvaturas principais de  $\Gamma_p$  em  $p$  são limitadas pelas curvaturas principais das esferas de raio  $\delta$  em  $U_r(\Gamma)$ , que por sua vez são limitadas por cima por  $\sqrt{C} \coth(\sqrt{C}\delta)$  por [Che89, Proposição 1.7.1, p. 184].

De fato, considere  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$  as curvaturas principais de  $\Gamma_p$  em  $p$  cujas respectivas direções principais são  $E_1, \dots, E_{n-1}$  e  $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$  as curvaturas principais de  $\mathbb{S}_\delta$  em  $p$  cujas respectivas direções principais são  $F_1, \dots, F_{n-1}$ , pois todas as direções são principais em  $\mathbb{S}_\delta$  e  $T_p\Gamma_p = T_p\mathbb{S}_\delta$ .

Além disso, considere  $N(p)$  o normal a  $\Gamma_p$  em  $p$  e note que  $N(p)$  e  $-N(p)$  são os normais às esferas de raio  $\delta$  em  $U_r(\Gamma)$  que rolam livremente em cada lado de  $\Gamma_p$ . Seja  $\Pi_i^p$  o espaço gerado pelos vetores  $N(p)$  e  $E_i$ . Note que, pelo Teorema de Whitney do mergulho e o Teorema da transversalidade, temos que as interseções  $\Pi_i^p \cap \Gamma_p$  e  $\Pi_i^p \cap \mathbb{S}_\delta$  (com ambas as esferas que rolam livremente em cada lado de  $\Gamma_p$ ), em uma vizinhança de  $p$ , são o traço de uma curva regular plana.

Para  $i = 1, \dots, n-1$ , considere  $\alpha_i : ]-\varepsilon_i, \varepsilon_i[ \rightarrow \Gamma_p$  a curva regular p.p.c.a. tal que  $\alpha_i(0) = p$ ,  $\alpha'_i(0) = E_i$  e  $\alpha_i(]-\varepsilon_i, \varepsilon_i[)$  é o traço da curva plana  $\Pi_i^p \cap \Gamma_p$  e considere  $\beta_i : ]-\bar{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon}_i[ \rightarrow \mathbb{S}_\delta$  uma curva regular p.p.c.a. tal que  $\beta_i(0) = p$ ,  $\beta'_i(0) = E_i$  e  $\beta_i(]-\bar{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon}_i[)$  é o traço da curva plana  $\Pi_i^p \cap \mathbb{S}_\delta$ .

Sejam, para  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $K_i : ]-\varepsilon_i, \varepsilon_i[ \rightarrow \mathbb{R}$  as curvaturas sobre  $M$  de  $\alpha_i$  em  $p$  e  $T_i : ]-\bar{\varepsilon}_i, \bar{\varepsilon}_i[ \rightarrow \mathbb{R}$  as curvaturas sobre  $\mathbb{B}_\delta$  de  $\beta_i$  em  $p$ . Por [Lee18, Proposição 8.10, p. 233] temos, para  $i = 1, \dots, n-1$ , que

$$|\kappa_i| = |II_{\Gamma_p}(E_i, E_i)| = K_i(0) \quad \text{e} \quad |\tau_i| = |II_{\mathbb{S}_\delta}(F_i, F_i)| = T_i(0),$$

onde  $II_{\Gamma_p}$  é a segunda forma fundamental de  $\Gamma_p$  e  $II_{\mathbb{S}_\delta}$  é a segunda forma fundamental de  $\mathbb{S}_\delta$ .

Portanto, para compararmos as curvaturas principais de  $\Gamma_p$  em  $p$  com as curvaturas principais das esferas de raio  $\delta$  em  $U_r(\Gamma)$ , basta compararmos as curvaturas das curvas  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  em  $t = 0$ .

Assim, reduzimos nosso problema em estudar a seguinte situação: considere uma curva plana  $\gamma : ]-a, a[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  arbitrária tal que  $\gamma(0) = q$  e  $\gamma'(0) = v$ . Além disso, existem duas circunferências de raio  $r$   $\phi : ]-b, b[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\psi : ]-c, c[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  tangentes a  $\gamma$  distintas tais que  $\phi(0) = q$ ,  $\psi(0) = q$ ,  $\phi'(0) = v$ ,  $\psi'(0) = v$ .

Em uma vizinhança de  $q$  podemos parametrizar  $\gamma, \phi$  e  $\psi$  como gráfico das funções  $f, g, h : ]-d, d[ \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \gamma(s) = (s, f(s)) \\ \phi(s) = (s, g(s)) \\ \psi(s) = (s, h(s)) \end{cases} .$$

Note que  $g(0) = f(0) = h(0)$ ,  $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall x \in ]-\bar{d}, \bar{d}[ \subset ]-d, d[$  e  $f'(0) = g'(0) = h'(0)$ . Além disso,

$$\begin{cases} |\gamma''(s)| = |f''(s)| \\ |\phi''(s)| = |g''(s)| \\ |\psi''(s)| = |h''(s)| \end{cases}$$

Pelo Teorema de Taylor temos, para  $x \in ]-\bar{d}, \bar{d}[$ , que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + r_f(x), \quad (68)$$

onde  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_f(x)}{x^2} = 0$ ,

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + r_g(x), \quad (69)$$

onde  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_g(x)}{x^2} = 0$ ,

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + r_h(x), \quad (70)$$

onde  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_h(x)}{x^2} = 0$ . Mas como  $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \forall x \in ]-\bar{d}, \bar{d}[$  temos de (68), (69) e (70) que  $h''(0) \leq f''(0) \leq g''(0)$ .

Portanto, como  $|g''(0)| = |h''(0)| = \frac{1}{r}$ , temos que  $|\gamma''(0)| \leq \frac{1}{r}$ , isto é, a curvatura da curva  $\gamma$  é limitada superiormente pela curvatura da circunferência.  $\square$

### 3.2 NOÇÕES DE CONVEXIDADE EM VARIEDADES DE CARTAN-HADAMARD

Nesta seção queremos estabelecer uma relação entre a curvatura total de uma hipersuperfície convexa em uma variedade de Cartan-Hadamard  $n$ -dimensional com a curvatura total de uma hipersuperfície  $d$ -convexa em uma variedade de Cartan-Hadamard  $(n+1)$ -dimensional. Para isso, começemos definindo nossos objetos de interesse.

**Definição 3.27.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $X \subset M$  um subconjunto de  $M$ . Dizemos que  $X$  é (geodesicamente) **convexo** se para todo par de pontos  $p, q \in X$  existe uma única geodésica  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  tal que  $\gamma([t_1, t_2]) \subset X$ ,  $\gamma(t_1) = p$  e  $\gamma(t_2) = q$ , com  $t_1, t_2 \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  e  $t_1 < t_2$ .

**Definição 3.28.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $X \subset M$  um subconjunto de  $M$  convexo. Dizemos que  $X$  é **estritamente convexo** se para  $p, q \in \partial X$  não existe uma geodésica  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  tal que  $\gamma([t_1, t_2]) \subset \partial X$ ,  $\gamma(t_1) = p$  e  $\gamma(t_2) = q$ , com  $t_1, t_2 \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  e  $t_1 < t_2$ .

**Exemplo 3.29.** Note que o subconjunto de  $X \subset \mathbb{R}^2$  dado por  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$  é um conjunto convexo mas que não é estritamente convexo. Por outro lado, o subconjunto  $Y \subset \mathbb{R}^2$  dado por  $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  é um conjunto estritamente convexo. Como ilustra a Figura 6, onde  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , são exemplos de traços de geodésicas.

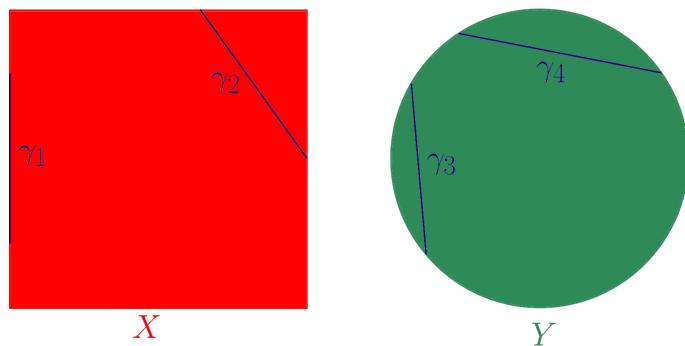


Figura 6: Um conjunto convexo e um conjunto estritamente convexo.

**Definição 3.30.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $X \subset M$  um subconjunto de  $M$  convexo, compacto e com interior não vazio. Chamamos de **hipersuperfície convexa** a fronteira  $\partial X$  de  $X$ .

**Definição 3.31.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que  $u$  é **convexa** se para toda geodésica  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  e para todos  $t_1, t_2 \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ ,  $\varepsilon > 0$ , tais que  $(1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2 \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  para todo  $\lambda \in [0, 1]$  temos que

$$u \circ \gamma((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2) \leq (1 - \lambda)u \circ \gamma(t_1) + \lambda u \circ \gamma(t_2). \quad (71)$$

Além disso, dizemos que  $u$  é **estritamente convexa** se (71) é estrita e dizemos que  $u$  é **concava** se  $-u$  é convexa.

**Observação 3.32.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ . Afirmamos que  $u$  é convexa se, e somente se,  $\text{Hess}(u)$  é positiva semi-definida.

De fato, considere  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  uma geodésica arbitrária. Assim,  $u \circ \gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa se, e somente se,  $u$  é convexa. Mas  $u \circ \gamma$  é convexa se, e somente se,  $(u \circ \gamma)'' \geq 0$ , essa afirmação é conhecida da análise de funções convexas e segue diretamente do Teorema de Taylor. Por fim, basta notarmos que  $(u \circ \gamma)'' \geq 0$  se, e somente se,  $\text{Hess}(u)$  é positiva semi-definida.

**Definição 3.33.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $X \subset M$  um subconjunto de  $M$  e  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que  $u$  é **convexa no conjunto**  $X$  se  $u$  é convexa em todos os segmentos de geodésica contidos em  $X$ .

Novamente vamos relacionar uma propriedade de um subconjunto de uma variedade de Cartan-Hadamard com uma propriedade da função distância a este subconjunto, neste caso a propriedade será a convexidade.

**Lema 3.34.** Seja  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard e  $X \subset M$  um subconjunto convexo de  $M$ . Então  $d_X$  é convexa.

*Demonstração.* Notando que variedades de Cartan-Hadamard são variedades completas, conexas e com curvatura (seccional) não positiva. Portanto, são espaços  $CAT(0)$  e por [BH99, Corolário 2.5 item 1, p. 178] temos que  $d_X$  é convexa.  $\square$

**Observação 3.35.** Assim, pelo Lema 3.34 podemos provar que uma esfera geodésica é uma hipersuperfície convexa. Considere  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard e  $S \subset M$  uma esfera geodésica.

De fato, Note que  $S = \partial B$ , onde  $B$  é a bola geodésica correspondente. Logo, se  $B \subset M$  é convexa então  $S$  é uma hipersuperfície convexa como requerido.

Para mostrarmos que a bola geodésica  $B \subset M$  é convexa considere  $B \subset M$  de raio  $r$ . Assim,  $B = \{q \in M : d_p(q) \leq r\}$ , onde  $d_p(\cdot) = d(p, \cdot)$ , além disso, por [BH99, Proposição 2.2, p.

176], temos que  $d_p$  é uma função convexa. Portanto, considere  $p_1, p_2 \in B$  e  $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow M$  o segmento de geodésica tal que  $\gamma(t_1) = p_1$  e  $\gamma(t_2) = p_2$ . Note que para todo  $\bar{p} \in \gamma([t_1, t_2])$  existe um  $\lambda \in [0, 1]$  tal que  $\gamma((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2) = \bar{p}$ . Logo, da convexidade de  $d_p$  temos que

$$\begin{aligned} d_p(\bar{p}) &= d_p(\gamma((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2)) \\ &\leq (1 - \lambda)d_p(\gamma(t_1)) + \lambda d_p(\gamma(t_2)) \\ &= (1 - \lambda)d_p(p_1) + \lambda d_p(p_2) \\ &\leq (1 - \lambda)r + \lambda r \\ &= r. \end{aligned}$$

De onde segue-se que  $\bar{p} \in B$  e, portanto,  $B$  é convexo.

O lema anterior relacionou a convexidade de um subconjunto de uma variedade de Cartan-Hadamard com a convexidade da função distância ao subconjunto, entretanto podemos estender essa relação para a função distância com sinal.

Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $X \subset M$  um subconjunto de  $M$  convexo, limitado e com interior não vazio. Note que se  $M = \mathbb{R}^n$  temos que  $d_{\partial X}^*$  é convexa em  $X$ .

De fato, sejam  $x, y \in X$  arbitrários e defina  $x_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)y$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ , isto é,  $x_\lambda$  é um ponto do segmento de reta que une  $x$  e  $y$ . Note que  $x_\lambda \in X$ , pois  $X$  é convexo.

Definamos  $r_x = d_{M \setminus cl(X)}(x)$ ,  $r_y = d_{M \setminus cl(X)}(y)$  e  $r_\lambda = \lambda r_x + (1 - \lambda)r_y$ . Note que  $B_{r_x}(x) \subset cl(X)$  e  $B_{r_y}(y) \subset cl(X)$  por definição. Além disso,  $B_{r_\lambda}(x_\lambda) \subset cl(X)$ .

De fato, considere  $z \in B_{r_\lambda}(x_\lambda)$  e defina

$$\begin{cases} z_x = x & , \text{ se } r_\lambda = 0, \\ z_y = y & \\ \begin{cases} z_x = x + \frac{r_x}{r_\lambda}(z - x_\lambda) & , \text{ se } r_\lambda \neq 0. \\ z_y = y + \frac{r_y}{r_\lambda}(z - x_\lambda) & \end{cases} & \end{cases}$$

Note que  $\lambda z_x + (1 - \lambda)z_y = z$ . De fato, se  $r_\lambda = 0$  temos que  $x_\lambda = z$  e, portanto,  $\lambda z_x + (1 - \lambda)z_y = \lambda x + (1 - \lambda)y = x_\lambda = z$ . Por outro lado, se  $r_\lambda \neq 0$  temos que

$$\begin{aligned} \lambda z_x + (1 - \lambda)z_y &= \lambda \left( x + \frac{r_x}{r_\lambda}(z - x_\lambda) \right) + (1 - \lambda) \left( y + \frac{r_y}{r_\lambda}(z - x_\lambda) \right) \\ &= \lambda x + (1 - \lambda)y + \frac{\lambda r_x + (1 - \lambda)r_y}{r_\lambda}(z - x_\lambda) \\ &= x_\lambda + \frac{r_\lambda}{r_\lambda}(z - x_\lambda) = z \end{aligned}$$

Além disso, note que  $z_x \in B_{r_x}(x)$  e  $z_y \in B_{r_y}(y)$ . E, logo,  $B_{r_\lambda}(x_\lambda) \subset \lambda B_{r_x}(x) + (1 - \lambda)B_{r_y}(y) \subset cl(X)$ . Assim, como  $X$  é convexo, em particular, temos que

$$\begin{aligned} d_{M \setminus cl(X)}(x_\lambda) &\geq d_{M \setminus B_{r_\lambda}(x_\lambda)}(x_\lambda) \\ &\geq r_\lambda \\ &= \lambda r_x + (1 - \lambda)r_y \\ &= \lambda d_{M \setminus cl(X)}(x) + (1 - \lambda)d_{M \setminus cl(X)}(y). \end{aligned}$$

Portanto,  $d_{M \setminus cl(X)}(\cdot)$  é uma função concava e  $d_{\partial X}^*(\cdot) = d_{cl(X)}(\cdot) - d_{M \setminus cl(X)}(\cdot) = -d_{M \setminus cl(X)}(\cdot)$  é uma função convexa.

Mais geralmente, temos por [Sak96, Lema 3.3, p.214-215] que para  $M$ , uma variedade Riemanniana tal que a curvatura de  $M$  em  $X$  é não negativa,  $d_{\partial X}^*$  é convexa. Contudo, se a curvatura de  $M$  em  $X$  é estritamente negativa,  $d_{\partial X}^*$  pode não ser convexa; por exemplo, tome  $X$  a região no plano hiperbólico entre um par de geodésicas que não se intersectam.

Assim, podemos definir o outro objeto de interesse desta seção.

**Definição 3.36.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada em  $M$  tal que  $\Gamma$  limita um domínio  $\Omega$ . Dizemos que  $\Gamma$  é **d-convexa** se  $d_{\Gamma}^*$  é convexa em  $\Omega$ .

**Definição 3.37.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard. Definimos uma **horoesfera** como o limite de uma família de esferas geodésicas cujos raios vão para o infinito, e uma **horobola** é o limite da família de bolas correspondentes.

**Exemplo 3.38.** A Figura 7 ilustra um exemplo de horoesfera  $S$  em  $\mathbb{H}^2$  no modelo de semi-plano superior.

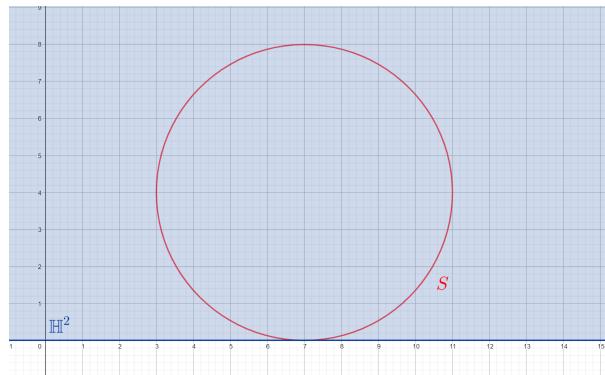


Figura 7: Horoesfera em  $\mathbb{H}^2$  no modelo de semi-plano superior.

**Observação 3.39.** A função distância a uma horoesfera é uma função de Busemann; que são funções convexas e de classe  $\mathcal{C}^2$ .

**Definição 3.40.** Seja  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada em  $M$  tal que  $\Gamma$  limita um domínio  $\Omega$ . Dizemos que  $\Gamma$  é uma hipersuperfície **h-convexa** se para cada ponto de  $\Gamma$  passa uma horoesfera que contém  $\Gamma$ , isto é,  $\Gamma$  está contida na respectiva horobola.

O próximo lema estabelece uma relação entre a h-convexidade e a d-convexidade de uma hipersuperfície.

**Lema 3.41.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada em  $M$  tal que  $\Gamma$  limita um domínio  $\Omega$ . Se  $\Gamma$  é h-convexa e  $\mathcal{C}^{1,1}$  então  $\Gamma$  é d-convexa.

*Demonstração.* Seja  $q \in \Gamma$  um ponto arbitrário e considere  $S_q$  a horoesfera que passa por  $q$  e cuja horobola correspondente  $B_q$  é tal que  $\Gamma \subset B_q$ .

Seja  $p \in \Omega$  um ponto arbitrário e  $p_0$  seu pé da perpendicular em  $\Gamma$ . Considere  $S_{p_0}$  a horoesfera que passa por  $q$  e cuja horobola correspondente  $B_{p_0}$  é tal que  $\Gamma \subset B_{p_0}$ . Então

$$\begin{aligned} d_{\Gamma}^*(p) &= d_{\Omega}(p) - d_{M \setminus \Omega}(p) = -d_{M \setminus \Omega}(p) = -d_{\Gamma}(p) = -d(p, p_0) = -d_{S_{p_0}}(p) \\ &= d_{B_{p_0}}(p) - d_{M \setminus B_{p_0}}(p) = d_{S_{p_0}}^*(p). \end{aligned}$$

Por outro lado, como  $\Gamma \subset B_{p_0}$ , para todo  $p \in \Omega$ , temos que  $d_{\Gamma}(p) \leq d_{S_q}(p)$ . Então

$$\begin{aligned} d_{\Gamma}^*(p) &= d_{\Omega}(p) - d_{M \setminus \Omega}(p) = -d_{M \setminus \Omega}(p) = -d_{\Gamma}(p) \\ &\geq -d_{S_{p_0}}(p) = d_{B_{p_0}}(p) - d_{M \setminus B_{p_0}}(p) = d_{S_{p_0}}^*(p). \end{aligned}$$

Portanto, temos que  $d_{\Gamma}^*(p) = \sup_{q \in \Gamma} d_{S_q}^*(p)$ , para todo  $p \in \Omega$ . Como  $d_{S_q}^*$  é uma função de Busemann,  $d_{S_q}^*$  é convexa; donde segue-se que  $d_{\Gamma}^*$  é convexa em  $\Omega$ . Logo,  $\Gamma$  é d-convexa.  $\square$

A volta do Lema 3.41 nem sempre é verdadeira. Por exemplo, para um segmento de geodésica arbitrário no plano hiperbólico, existe  $r > 0$  tal que a hipersuperfície tubular de raio  $r$  sobre esse segmento é d-convexa, mas não h-convexa.

Então, em resumo, temos, para variedades de Cartan-Hadamard, que

$$\{\text{hs. h-convexas}\} \subsetneq \{\text{hs. d-convexas}\} \subsetneq \{\text{hs. convexas}\},$$

onde *hs.* é uma abreviação para *hipersuperfície*.

Vamos construir uma hipersuperfície d-convexa em uma variedade de Cartan-Hadamard  $(n+1)$ -dimensional a partir de uma hipersuperfície convexa de uma variedade de Cartan-Hadamard  $n$ -dimensional.

**Observação 3.42.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard, então  $M \times \mathbb{R}$  com a métrica produto é uma variedade de Cartan-Hadamard. Além disso,  $M \subset M \times \mathbb{R}$  é uma hipersuperfície totalmente geodésica.*

Sejam  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície convexa que limita um domínio convexo  $\Omega$  e  $\varepsilon > 0$ . Considere  $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$  a hipersuperfície paralela de  $\Omega$  em  $M \times \mathbb{R}$  de distância  $\varepsilon$ , isto é,  $\tilde{\Gamma}_\varepsilon = \{p \in M \times \mathbb{R} : (u_\Omega)^{-1}(\varepsilon)\}$ , onde  $u_\Omega$  é a função distância, na variedade  $M \times \mathbb{R}$ , à hipersuperfície  $\Omega$ .

Afirmamos que  $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$  é uma hipersuperfície d-convexa em  $M \times \mathbb{R}$ .

De fato, pelo Lema 3.34 temos que  $u_\Omega$  é convexa. Mas como,  $\partial\bar{\Omega} = \tilde{\Gamma}_\varepsilon$ , com  $\bar{\Omega} = \{p \in M \times \mathbb{R} : u_\Omega(p) \leq \varepsilon\}$ , temos que  $u_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon}^*$  é convexa em  $\bar{\Omega}$ , pois  $u_\Omega$  é convexa.

Primeiramente, note que para  $p \in \bar{\Omega}$  e  $p' \in \tilde{\Gamma}_\varepsilon$  o pé da perpendicular de  $p$  em  $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$  temos que

$$\begin{aligned} u_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon}^*(p) &= u_{\bar{\Omega}}(p) - u_{M \times \mathbb{R} \setminus \bar{\Omega}}(p) = -u_{M \times \mathbb{R} \setminus \bar{\Omega}}(p) \\ &= -(u_\Omega(p') - u_\Omega(p)) = u_\Omega(p) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, considere  $p_1, p_2 \in \bar{\Omega}$  e  $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow M \times \mathbb{R}$  a geodésica tal que  $\gamma(t_1) = p_1$ ,  $\gamma(t_2) = p_2$  e  $\gamma([t_1, t_2]) \subset \bar{\Omega}$ . Tome  $p \in \gamma([t_1, t_2])$  arbitrário tal que  $\gamma((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) = p$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Logo, como  $u_\Omega$  é convexa,

$$\begin{aligned} u_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon}^* \circ \gamma((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) &= u_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon}^*(p) = u_\Omega(p) - \varepsilon = (u_\Omega \circ \gamma((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2)) - \varepsilon \\ &\leq ((1-\lambda)u_\Omega \circ \gamma(t_1) + \lambda u_\Omega \circ \gamma(t_2)) - \varepsilon \\ &= ((1-\lambda)u_\Omega(p_1) + \lambda u_\Omega(p_2)) - \varepsilon \\ &= ((1-\lambda)(u_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon}^*(p_1) + \varepsilon) + \lambda(u_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon}^*(p_2) + \varepsilon)) - \varepsilon \\ &= ((1-\lambda)u_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon}^*(p_1) + \lambda u_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon}^*(p_2)) + \varepsilon - \lambda\varepsilon + \lambda\varepsilon - \varepsilon \\ &= (1-\lambda)u_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon}^*(p_1) + \lambda u_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon}^*(p_2) \\ &= (1-\lambda)u_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon}^* \circ \gamma(t_1) + \lambda u_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon}^* \circ \gamma(t_2) \end{aligned}$$

Portanto,  $u_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon}^*$  é convexa em  $X$  e, consequentemente,  $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$  é uma hipersuperfície d-convexa em  $M \times \mathbb{R}$ .

A próxima proposição estabelece a relação desejada, isto é, uma relação entre a curvatura total de uma hipersuperfície convexa em uma variedade de Cartan-Hadamard

$n$ -dimensional com a curvatura total de uma hipersuperfície  $d$ -convexa em uma variedade de Cartan-Hadamard  $(n+1)$ -dimensional.

**Proposição 3.43.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard  $n$ -dimensional,  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície convexa  $C^2$  que limita um domínio convexo  $\Omega$  e  $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$  a hipersuperfície paralela de  $\Omega$  em  $M \times \mathbb{R}$  de distância  $\varepsilon$ . Então, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,*

$$\frac{\mathcal{G}(\tilde{\Gamma}_\varepsilon)}{\text{vol}(\mathbb{S}^n)} \rightarrow \frac{\mathcal{G}(\Gamma)}{\text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})}.$$

*Em particular, se  $\mathcal{G}(\tilde{\Gamma}_\varepsilon) \geq \text{vol}(\mathbb{S}^n)$  então  $\mathcal{G}(\Gamma) \geq \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})$*

Note que para  $M = \mathbb{R}^n$ , pelo Teorema de Gauss-Bonnet, temos que a curvatura total de uma hipersuperfície convexa  $n$ -dimensional é igual ao volume de uma esfera  $n$ -dimensional. Logo a Proposição 3.43 é válida quando  $M = \mathbb{R}^n$ .

Note que  $\text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) = n\omega_n$ , onde  $\omega_n = \text{vol}(\mathbb{B}^n) = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} = \frac{\pi^{n/2}}{G\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$  e  $G$  é a função gama.

*Demonstração da Proposição 3.43.* Sejam  $q \in \tilde{\Gamma}_\varepsilon$  e  $p \in \text{cl}(\Omega) = \Omega \cap \Gamma$  o único pé da perpendicular de  $q$  em  $\text{cl}(\Omega)$ .

Se  $p \in \Omega$  então existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $q \in \tilde{\Gamma}_\varepsilon$  contida em  $M \times \{\varepsilon\}$  ou em  $M \times \{-\varepsilon\}$ , como ilustra a Figura 8. Disso temos que  $GK^\varepsilon(q) = 0$ , pois cada hipersuperfície  $M \times \{t\} \subset M \times \mathbb{R}$  é totalmente geodésica, isto implica que  $S_q^\varepsilon(X) = \nabla_X \tilde{N} = 0$ , onde  $X \in T_p \tilde{\Gamma}_\varepsilon$  e  $\tilde{N}$  é o normal para fora de  $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$ .

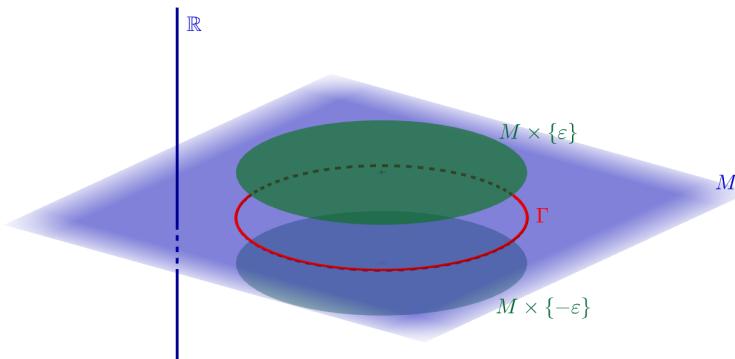


Figura 8:  $M \times \{\varepsilon\}$  e  $M \times \{-\varepsilon\}$ .

Portanto, a única contribuição para  $\mathcal{G}(\tilde{\Gamma}_\varepsilon)$  vem dos pontos  $q \in \tilde{\Gamma}_\varepsilon$  cujo pé da perpendicular está em  $\Gamma$ . Essa parte de  $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$  é a metade de fora do tubo de raio  $\varepsilon$  ao redor de  $\Gamma$ , o qual denotaremos por  $\text{tube}_\varepsilon^+(\Gamma)$ .

Assim, temos que  $\mathcal{G}(\tilde{\Gamma}_\varepsilon) = \mathcal{G}(tube_\varepsilon^+(\Gamma))$ .

Definamos  $\alpha_n = \frac{vol(\mathbb{S}^n)}{vol(\mathbb{S}^{n-1})}$ . Disso segue-se que

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{vol(\mathbb{S}^n)}{vol(\mathbb{S}^{n-1})} \\
&= \frac{(n+1)\omega_{n+1}}{n\omega_n} \\
&= \frac{n+1}{n} \frac{\pi^{n/2} \pi^{1/2}}{G\left(\frac{n+1}{2} + 1\right)} \frac{G\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\pi^{n/2}} \\
&= \frac{n+1}{n} \frac{\pi^{1/2}(n/2)G\left(\frac{n}{2}\right)}{((n+1)/2)G\left(\frac{n+1}{2}\right)} \\
&= \frac{G\left(\frac{1}{2}\right)G\left(\frac{n}{2}\right)}{G\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2}\right)} \\
&= B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}(\theta) d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-1}(\theta) d\theta, \tag{72}
\end{aligned}$$

onde  $B$  é a função beta. Portanto, é suficiente mostrar que, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , temos

$$\mathcal{G}(tube_\varepsilon^+(\Gamma)) \rightarrow \alpha_n \mathcal{G}(\Gamma).$$

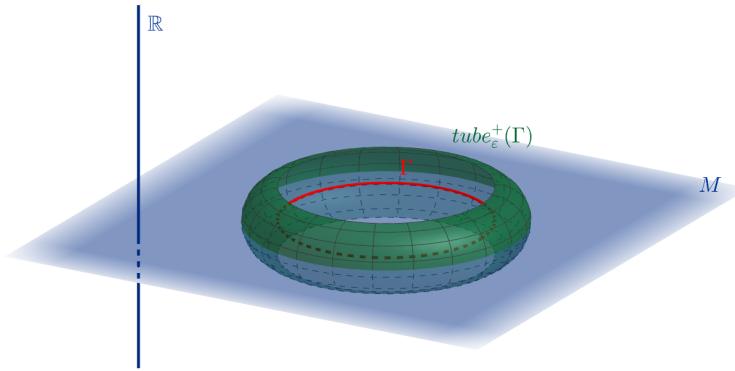
Para isso considere  $N$  o normal unitário de  $\Gamma$  que aponta para fora com respeito a  $\Omega$  em  $M$ ,  $N^\perp$  o normal unitário ortogonal a  $M$  em  $M \times \mathbb{R}$  e defina  $f^\varepsilon : \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$  por

$$f^\varepsilon(p, \theta) = \exp_p^{M \times \mathbb{R}}(\varepsilon N(p)(\theta)),$$

onde  $N(p)(\theta) = \cos(\theta)N(p) + \sin(\theta)N^\perp(p)$ . Assim, definimos

$$tube_\varepsilon^+(\Gamma) = f^\varepsilon(\Gamma \times [-\pi/2, \pi/2]).$$

A Figura 9 ilustra o  $tube_\varepsilon^+(\Gamma)$ .

Figura 9:  $tube_\varepsilon^+(\Gamma)$ .

Note que  $tube_\varepsilon^+(\Gamma) \subset d_\Gamma^{-1}(\varepsilon)$ , onde  $d_\Gamma$  é a função distância a  $\Gamma$  em  $M \times \mathbb{R}$ . Portanto, como  $\Gamma$  é  $\mathcal{C}^2$ , temos pelo Lema 3.19 que  $d_\Gamma$  é  $\mathcal{C}^2$ . Donde temos que  $tube_\varepsilon^+(\Gamma)$  é  $\mathcal{C}^2$ . Então o operador forma de  $tube_\varepsilon^+(\Gamma)$  está bem definido.

Por [GT14, Corolário 2.2 p. 123] temos que o operador forma de  $tube_\varepsilon^+(\Gamma)$  no ponto  $f^\varepsilon(p, \theta)$  na direção de  $N(p)(\theta)$  é dado por

$$S_{p,\theta}^\varepsilon = \begin{pmatrix} S_{p,\theta} + \mathcal{O}(\varepsilon) & \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \mathcal{O}(\varepsilon) & 1/\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (73)$$

onde  $\mathcal{O}(\varepsilon) \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $S_{p,\theta}$  é operador forma de  $\Gamma$  em  $p$  na direção de  $N(p)(\theta)$ . Note que o operador forma em [GT14] e [Graoo] tem sinal oposto ao utilizado na Definição 2.82.

Os autovalores de  $S_{p,\theta}$  são  $\kappa_i(p)\cos(\theta)$  onde  $\kappa_i(p)$  são as curvaturas principais de  $\Gamma$  em  $p$ .

De fato, sejam  $\kappa_i(p)$  as curvaturas principais de  $\Gamma$  em  $p$  e  $E_i(p)$  as direções principais de  $\Gamma$  em  $p$ . Considere  $S_p$  o operador forma de  $\Gamma$  em  $p$  na direção de  $N(p)$ . Note que o operador  $S_p$  é dado por  $S_p(X) = \nabla_X N(p)$ , onde  $X \in T_p\Gamma$ . Além disso, temos que

$$\kappa_i(p) = \langle S_p(E_i(p)), E_i(p) \rangle.$$

Portanto, temos que para  $X \in T_p\Gamma$

$$\begin{aligned} S_{p,\theta}(X) &= \nabla_X N(p)(\theta) \\ &= \nabla_X(\cos(\theta)N(p) + \sin(\theta)N^\perp(p)) \\ &= \nabla_X(\cos(\theta)N(p)) + \nabla_X(\sin(\theta)N^\perp(p)) \\ &= \cos(\theta)\nabla_X N(p) + \sin(\theta)\nabla_X N^\perp(p) \end{aligned}$$

$$= \cos(\theta)S_p(X).$$

Logo, obtemos que

$$S_{p,\theta}(E_i(p)) = \cos(\theta)S_p(E_i(p)) = \cos(\theta)\kappa_i(p)E_i(p).$$

Ou seja,  $\kappa_i(p)\cos(\theta)$  são os autovalores de  $S_{p,\theta}$  cujos respectivos autovetores são  $E_i(p)$ .

Então, disso segue-se que a curvatura de Gauss-Kronecker de  $tube_\varepsilon^+(\Gamma)$  no ponto  $f^\varepsilon(p, \theta)$  é dada por

$$\begin{aligned} GK^\varepsilon(p, \theta) &= \det(S_{p,\theta}^\varepsilon) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \det(S_{p,\theta}) + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{O}(\varepsilon) + \det(S_{p,\theta})\mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon)\mathcal{O}(\varepsilon) - \mathcal{O}(\varepsilon)\mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \det(S_{p,\theta}) + \mathcal{O}(1) + \det(S_{p,\theta})\mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{O}(1)$  converge para uma constante quanto  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Além disso, afirmamos que

$$Jac(f^\varepsilon)_{(p,\theta)} = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (74)$$

onde  $Jac(f^\varepsilon)_{(p,\theta)}$  é o elemento de área infinitesimal de  $tube_\varepsilon^+(\Gamma)$ . Então, disso temos, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(tube_\varepsilon^+(\Gamma)) &= \int_{tube_\varepsilon^+(\Gamma)} GK^\varepsilon d\mu_\varepsilon \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{p \in \Gamma} GK^\varepsilon Jac(f^\varepsilon)_{(p,\theta)} d\mu d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{p \in \Gamma} \left( \frac{1}{\varepsilon} \det(S_{p,\theta}) + \mathcal{O}(1) + \det(S_{p,\theta})\mathcal{O}(\varepsilon) \right) \left( \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) d\mu d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{p \in \Gamma} \det(S_{p,\theta}) + \varepsilon \mathcal{O}(1) + \varepsilon \det(S_{p,\theta})\mathcal{O}(\varepsilon) + GK^\varepsilon \mathcal{O}(\varepsilon^2) d\mu d\theta \\ &\rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{p \in \Gamma} GK(p) \cos^{n-1}(\theta) d\mu d\theta \\ &= \alpha_n \mathcal{G}(\Gamma), \end{aligned}$$

como desejado. Portanto, basta provarmos (74). Por [Graoo, Lema 3.12, p.41] temos que

$$Area(tube_\varepsilon^+) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{S}^1} \varepsilon v_u(\varepsilon) du d\Gamma,$$

onde  $Area(tube_\varepsilon^+)$  é área do  $tube_\varepsilon^+$  e  $v_u(\varepsilon)$  é dado por [Graoo, Lema 3.9 item (iii), p. 38 e Teorema 3.11, p. 39], da seguinte maneira:

$$\frac{v'_u(\varepsilon)}{v_u(\varepsilon)} = -\frac{1}{\varepsilon} + trace \left( S_{p,\theta}^\varepsilon \right) \quad \text{e} \quad v_u(0) = 1.$$

Portanto,

$$Jac(f^\varepsilon)_{(p,\theta)} = \varepsilon v_u(\varepsilon).$$

Mas, por (73), temos que

$$\text{trace}(S_{p,\theta}^\varepsilon) = \text{trace}(S_{p,\theta}) + \frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Donde temos que

$$\frac{v'_u(\varepsilon)}{v_u(\varepsilon)} = -\frac{1}{\varepsilon} + \text{trace}(S_{p,\theta}) + \frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon) = \text{trace}(S_{p,\theta}) + \mathcal{O}(\varepsilon) = \mathcal{O}(1).$$

Consequentemente, pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pela série de Taylor da exponencial temos que

$$\begin{aligned} \frac{v'_u(\varepsilon)}{v_u(\varepsilon)} &= \mathcal{O}(1) \\ \int_0^\varepsilon \frac{v'_u(t)}{v_u(t)} dt &= \int_0^\varepsilon \mathcal{O}(1) dt \\ \ln(v_u(\varepsilon)) - \ln(v_u(0)) &= \mathcal{O}(t)|_0^\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \ln(v_u(\varepsilon)) &= \mathcal{O}(\varepsilon) \\ v_u(\varepsilon) &= e^{\mathcal{O}(\varepsilon)} = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

o que implica em

$$Jac(f^\varepsilon)_{(p,\theta)} = \varepsilon \mathcal{O}(\varepsilon) = \varepsilon(1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

como desejado.  $\square$

**Corolário 3.44.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície  $d$ -convexa  $\mathcal{C}^2$  que limita um domínio convexo  $\Omega$  tal que*

$$\mathcal{G}(\Gamma) \geq \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})$$

*então para  $\Delta \subset M$  uma hipersuperfície convexa  $\mathcal{C}^2$  que limita um domínio convexo  $\overline{\Omega}$  temos que*

$$\mathcal{G}(\Delta) \geq \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})$$

**Corolário 3.45.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard  $n$ -dimensional e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície  $d$ -convexa  $\mathcal{C}^2$  que limita um domínio convexo  $\Omega$  tal que*

$$\mathcal{G}(\Gamma) \geq \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})$$

*então para  $N$  uma variedade de Cartan-Hadamard  $k$ -dimensional,  $k \leq n$ , e  $\Delta \subset N$  uma hipersuperfície convexa  $\mathcal{C}^2$  que limita um domínio convexo  $\overline{\Omega}$  temos que*

$$\mathcal{G}(\Delta) \geq \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1})$$

### 3.3 UMA FÓRMULA DE COMPARAÇÃO

Nesta seção queremos encontrar uma fórmula de comparação para a curvatura total de hipersuperfícies.

Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional e  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^{1,1}$  em  $M$ . Então, pelo Teorema de Rademacher,  $u$  é duas vezes diferenciável em quase todo ponto de  $M$ .

Sejam  $p \in M$  um ponto no qual  $u$  seja duas vezes diferenciável e  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , um campo referencial ortogonal suave em uma vizinhança  $V$  de  $p$ . O gradiente de  $u$  em  $U$  é dado por  $\text{grad}(u) = u_i E_i$  e o operador hessiana de  $u$  em  $p$  aplicado em um campo  $X \in \mathcal{X}(M)$ , cujas coordenadas são dadas por  $X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$ , é dado por  $\nabla^2(u)(X) = u_{ij} X^j E_i$ , onde

$$u_i = \langle \text{grad}(u), E_i \rangle \quad \text{e} \quad u_{ij} = \text{Hess}(u)(E_i, E_j). \quad (75)$$

Por outro lado, temos também que

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \text{Hess}(u)(E_i, E_j) \\ &= \langle \nabla_{E_i} \text{grad}(u), E_j \rangle \\ &= \langle \nabla_{E_i} u_k E_k, E_j \rangle \\ &= \langle u_k \nabla_{E_i} E_k + E_i(u_k) E_k, E_j \rangle \\ &= u_k \langle \nabla_{E_i} E_k, E_j \rangle + E_i(u_k) \langle E_k, E_j \rangle \\ &= E_i(u_k) \delta_{kj} + \langle \nabla_{E_i} E_k, E_j \rangle u_k \\ &= E_i(u_j) + \langle \nabla_{E_i} E_k, E_j \rangle u_k \\ &= E_j(u_i) + \langle \nabla_{E_j} E_k, E_i \rangle u_k \\ &= E_j(u_i) + \left( E_j \langle E_k, E_i \rangle - \langle \nabla_{E_j} E_i, E_k \rangle \right) u_k \\ &= E_j(u_i) - \langle \nabla_{E_j} E_i, E_k \rangle u_k \end{aligned} \quad (76)$$

Podemos assumir que  $(\nabla_{E_j} E_i)(p) = \nabla_{E_j} E_i(p) = 0$ , isto é,  $E_i$  é um referencial geodésico em  $p$ . Então, por (76) temos que

$$\begin{aligned} u_{ij}(p) &= (E_j(u_i) - \langle \nabla_{E_j} E_i, E_k \rangle u_k)(p) \\ &= (E_j(u_i))(p) + \langle \nabla_{E_j} E_i(p), E_k(p) \rangle u_k(p) \\ &= (E_j(u_i))(p) \end{aligned} \quad (77)$$

O cofator de uma matriz quadrada  $(a_{ij})$  é a matriz  $(\bar{a}_{ij})$  dada por  $(-1)^{i+j}$  vezes o determinante da matriz obtida removendo-se a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna de  $(a_{ij})$ .

**Definição 3.46.** Seja  $(u_{ij})$  dada por (75). Defina o **operador de cofator** associado a hessiana de  $u$  por  $\mathcal{T}^u : T_p M \rightarrow T_p M$  dado por  $(\mathcal{T}_{ij}^u) = (\bar{u}_{ij})$ .

**Observação 3.47.** Note que se o operador hessiana  $\nabla^2(u)$  é não degenerado então  $(\nabla^2(u))^{-1}(X) = u^{ij}V^jE_i$ , onde  $(u^{ij}) = (u_{ij})^{-1}$ . Note também que  $\nabla^2(u) = (u_{ij})$  é simétrica. Da álgebra linear, para uma matriz quadrada invertível, temos que  $C^T = \det(A)A^{-1}$ , onde  $C^T$  é a transposta da matriz de cofatores da matriz  $A$ . Logo,

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_{ij}^u) &= (\bar{u}_{ij}) \\ &= (\det((u_{ij}))(u^{ij}))^T \\ &= \det(\nabla^2(u))(u^{ij}) \\ &= \det(\nabla^2(u))(\nabla^2(u))^{-1}. \end{aligned} \tag{78}$$

Nesse caso, temos que

$$\mathcal{T}^u(X) = (\mathcal{T}_{ij}^u)X^jE_i = \det(\nabla^2(u))(\nabla^2(u))^{-1}(X) \tag{79}$$

**Definição 3.48.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $p \in M$  um ponto arbitrário e  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  em uma vizinhança de  $p$  tal que  $\text{grad}(u) \neq 0$ . Dizemos que o conjunto  $\Gamma = \{q \in M : u(q) = u(p)\} = u^{-1}(u(p))$  é o **conjunto de nível regular de  $u$  próximo a  $p$** .

Vamos relacionar as curvaturas principais de um conjunto de nível regular de uma função com os coeficientes da matriz hessiana desta mesma função.

**Observação 3.49.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional,  $p \in M$  um ponto arbitrário e  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  em uma vizinhança de  $p$  tal que  $\text{grad}(u) \neq 0$ . Considere  $\Gamma$  o conjunto de nível regular de  $u$  próximo a  $p$ . Note que  $\frac{\text{grad}(u)}{|\text{grad}(u)|}$  gera um campo vetorial normal a  $\Gamma$  próximo a  $p$ .

Considere  $E_l$ ,  $l = 1, \dots, n-1$ , as direções principais de  $\Gamma$  em  $p$ . Então  $\kappa_l$ ,  $l = 1, \dots, n-1$ , as correspondentes curvaturas principais de  $\Gamma$  em  $p$  com respeito a  $\frac{\text{grad}(u)}{|\text{grad}(u)|}$ , são dadas, para  $l = 1, \dots, n-1$ , por:

$$\kappa_l = \left( \nabla_{E_l} \left( \frac{\text{grad}(u)}{|\text{grad}(u)|} \right) \right)^T$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \nabla_{E_l} \left( \frac{\text{grad}(u)}{|\text{grad}(u)|} \right), E_l \right\rangle \\
&= \frac{1}{|\text{grad}(u)|} \langle \nabla_{E_l} \text{grad}(u), E_l \rangle \\
&= \frac{1}{|\text{grad}(u)|} \text{Hess}(u)(E_l, E_l) \\
&= \frac{u_{ll}}{|\text{grad}(u)|}
\end{aligned} \tag{80}$$

**Lema 3.50.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional,  $p \in M$  um ponto arbitrário e  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^{1,1}$  em uma vizinhança de  $p$  tal que  $\text{grad}(u) \neq 0$ . Considere  $\Gamma$  o conjunto de nível regular de  $u$  próximo a  $p$ . Suponha que  $\Gamma$  seja duas vezes diferenciável em  $p$ . Então a curvatura de Gauss-Kronecker de  $\Gamma$  em  $p$  com respeito a  $\frac{\text{grad}(u)}{|\text{grad}(u)|}$  é dada por

$$GK = \frac{\langle \mathcal{T}^u(\text{grad}(u)), \text{grad}(u) \rangle}{|\text{grad}(u)|^{n+1}}.$$

*Demonstração.* Seja  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , um referencial ortonormal para  $T_p M$  tal que  $E_l$ ,  $l = 1, \dots, n-1$ , são as direções principais de  $\Gamma$  em  $p$ . Note que, para  $i \neq j$ , temos que

$$\begin{aligned}
u_{ij} &= \text{Hess}(u)(E_i, E_j) \\
&= \langle \nabla_{E_i} \text{grad}(u), E_j \rangle \\
&= \langle S_p(E_i), E_j \rangle \\
&= \langle \kappa_i E_i, E_j \rangle \\
&= \kappa_i \langle E_i, E_j \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde  $\kappa_i$  é a curvatura principal associada a direção principal  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ .

Logo, as submatrizes principais  $(n-1) \times (n-1)$  da matriz  $(u_{ij})$  são matrizes diagonais. Assim,

$$\mathcal{T}_{nn}^u = (\bar{u}_{nn}) = \prod_{l=1}^{n-1} u_{ll}.$$

Além disso, como  $E_n$  é ortogonal a  $\Gamma$ , e  $\Gamma$  é o conjunto de nível de  $u$ ,  $\text{grad}(u)$  é paralelo a  $\pm E_n$ . Portanto,  $u_n = \langle \text{grad}(u), E_n \rangle = \pm |\text{grad}(u)|$ .

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\langle \mathcal{T}^u(\text{grad}(u)), \text{grad}(u) \rangle}{|\text{grad}(u)|^{n+1}} &= \frac{\langle (\mathcal{T}_{ij}^u) u_j E_i, u_k E_k \rangle}{|\text{grad}(u)|^{n+1}} \\
&= \frac{(\mathcal{T}_{ij}^u) u_j u_k \langle E_i, E_k \rangle}{|\text{grad}(u)|^{n+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\mathcal{T}_{ij}^u)u_j u_k \delta_{ik}}{|grad(u)|^{n+1}} \\
&= \frac{(\mathcal{T}_{ij}^u)u_j u_i}{|grad(u)|^{n+1}}
\end{aligned}$$

Mas como, para  $i \neq j$ , temos que  $u_{ij} = 0$  segue-se que  $(\mathcal{T}_{ij}^u) = (\bar{u}_{ij}) = 0$  para  $i \neq j$ . Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\langle \mathcal{T}^u(grad(u)), grad(u) \rangle}{|grad(u)|^{n+1}} &= \frac{(\mathcal{T}_{ij}^u)u_j u_i}{|grad(u)|^{n+1}} \\
&= \frac{(\mathcal{T}_{ii}^u)u_i u_i}{|grad(u)|^{n+1}}
\end{aligned}$$

Por outro lado, note que para  $i \neq n$  temos que  $u_i = \langle grad(u), E_i \rangle = \pm \langle E_n, E_i \rangle = 0$ . Assim, como  $\mathcal{T}_{nn}^u = \prod_{l=1}^{n-1} u_{ll}$ ,  $u_n = \pm |grad(u)|$  e de (8o) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\langle \mathcal{T}^u(grad(u)), grad(u) \rangle}{|grad(u)|^{n+1}} &= \frac{(\mathcal{T}_{nn}^u)u_n u_n}{|grad(u)|^{n+1}} \\
&= \frac{\prod_{l=1}^{n-1} u_{ll} |grad(u)|^2}{|grad(u)|^{n+1}} \\
&= \frac{1}{|grad(u)|^{n-1}} \prod_{l=1}^{n-1} u_{ll} \\
&= \prod_{l=1}^{n-1} \frac{u_{ll}}{|grad(u)|} \\
&= \prod_{l=1}^{n-1} \kappa_l \\
&= GK,
\end{aligned}$$

onde  $\kappa_l$ ,  $l = 1, \dots, n-1$ , são as curvaturas principais correspondentes as direções principais  $E_l$ ,  $l = 1, \dots, n-1$ .  $\square$

Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional,  $p \in M$  um ponto arbitrário de  $M$  e  $U \subset M$  uma vizinhança de  $p$ . Considere  $X \in \mathfrak{X}(U)$  um campo de vetores em  $U$ . Tome  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  um referencial geodésico em  $p$  e escreva  $X = X^j E_j$ . Assim, a divergência do campo de vetores  $\mathcal{T}^u(X)$  em  $p$  é dada por:

$$\begin{aligned}
div_p(\mathcal{T}^u(X)) &= \sum_{k=1}^n \langle \nabla_{E_k} \mathcal{T}^u(X), E_k \rangle(p) \\
&= \sum_{k=1}^n \langle \nabla_{E_k} (\mathcal{T}_{ij}^u) X^j E_i, E_k \rangle(p) \\
&= \sum_{k=1}^n \langle E_k ((\mathcal{T}_{ij}^u) X^j) E_i + (\mathcal{T}_{ij}^u) X^j \nabla_{E_k} E_i, E_k \rangle(p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n E_k((\mathcal{T}_{ij}^u)X^j)(p) \langle E_i(p), E_k(p) \rangle + \sum_{k=1}^n (\mathcal{T}_{ij}^u)X^j(p) \langle \nabla_{E_k} E_i(p), E_k(p) \rangle \\
&= \sum_{k=1}^n E_k((\mathcal{T}_{ij}^u)X^j)(p) \delta_{ik} \\
&= E_i((\mathcal{T}_{ij}^u)X^j)(p)
\end{aligned} \tag{81}$$

**Definição 3.51.** Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^{1,1}$  em  $M$  tal que  $u$  é duas vezes diferenciável em  $p \in M$ . Considere  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  um referencial geodésico para  $T_p M$  e  $\mathcal{T}^u$  o operador cofator associado a hessiana de  $u$ . Definimos a **divergência de  $\mathcal{T}^u$**  por

$$div_p(\mathcal{T}^u) = E_i(\mathcal{T}_{ij}^u)(p)E_j(p). \tag{82}$$

**Lema 3.52.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional,  $p \in M$  um ponto arbitrário e  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função três vezes diferenciável em  $p$ ,  $grad(u)(p) \neq 0$  e  $\nabla^2(u)(p)$  não degenerada. Então

$$div_p \left( \mathcal{T}^u \left( \frac{grad(u)}{|grad(u)|^n} \right) \right) = \left\langle div_p(\mathcal{T}^u), \frac{grad(u)}{|grad(u)|^n} \right\rangle. \tag{83}$$

*Demonstração.* Considere  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  um referencial geodésico em  $p$  e note que  $grad(u) = u_j E_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , onde  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , é dado por (75). De (81) temos que,

$$div_p \left( \mathcal{T}^u \left( \frac{grad(u)}{|grad(u)|^n} \right) \right) = E_i \left( (\mathcal{T}_{ij}^u) \frac{u_j}{|grad(u)|} \right) (p). \tag{84}$$

Por outro lado, pela Definição 3.51 temos que,

$$\begin{aligned}
\left\langle div_p(\mathcal{T}^u), \frac{grad(u)}{|grad(u)|^n} \right\rangle &= \left\langle E_i(\mathcal{T}_{ij}^u)(p)E_j(p), \frac{u_k E_k(p)}{|grad(u)|^n} \right\rangle \\
&= E_i(\mathcal{T}_{ij}^u)(p) \frac{u_k}{|grad(u)|^n} \langle E_j(p), E_k(p) \rangle \\
&= E_i(\mathcal{T}_{ij}^u)(p) \frac{u_k}{|grad(u)|^n} \langle E_j, E_k \rangle (p) \\
&= E_i(\mathcal{T}_{ij}^u)(p) \frac{u_k}{|grad(u)|^n} \delta_{kj} \\
&= E_i(\mathcal{T}_{ij}^u)(p) \frac{u_j}{|grad(u)|^n}.
\end{aligned} \tag{85}$$

Portanto, de (84) e (85) temos que basta provarmos que

$$E_i \left( (\mathcal{T}_{ij}^u) \frac{u_j}{|grad(u)|} \right) (p) = E_i(\mathcal{T}_{ij}^u)(p) \frac{u_j}{|grad(u)|^n}.$$

Note que, pela regra do produto, temos que

$$E_i \left( (\mathcal{T}_{ij}^u) \frac{u_j}{|grad(u)|} \right) (p) = E_i(\mathcal{T}_{ij}^u)(p) \frac{u_j}{|grad(u)|} + \mathcal{T}_{ij}^u \left( E_i \left( \frac{u_j}{|grad(u)|} \right) \right) (p).$$

Assim, basta provarmos que  $\mathcal{T}_{ij}^u \left( E_i \left( \frac{u_j}{|grad(u)|} \right) \right) (p) = 0$ .

De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{ij}^u \left( E_i \left( \frac{u_j}{|grad(u)|} \right) \right) (p) &= \mathcal{T}_{ij}^u \left( \frac{E_i(u_j)}{|grad(u)|^n} + u_j E_i \left( \frac{1}{|grad(u)|^n} \right) \right) (p) \\ &= \mathcal{T}_{ij}^u \left( \frac{E_i(u_j)(p)}{|grad(u)|^n} + u_j \frac{-n \langle grad(u), \nabla_{E_i} grad(u) \rangle(p)}{|grad(u)|^{n+2}} \right) \\ &= \mathcal{T}_{ij}^u \left( \frac{E_i(u_j)(p)}{|grad(u)|^n} - n u_j \frac{\langle u_k E_k, \nabla_{E_i} u_l E_l \rangle(p)}{|grad(u)|^{n+2}} \right) \\ &= \mathcal{T}_{ij}^u \left( \frac{E_i(u_j)(p)}{|grad(u)|^n} - n u_j u_k \frac{\langle E_k, u_l \nabla_{E_i} E_l + E_i(u_l) E_l \rangle(p)}{|grad(u)|^{n+2}} \right) \\ &= \mathcal{T}_{ij}^u \left( \frac{E_i(u_j)(p)}{|grad(u)|^n} - n u_j u_k \frac{\langle E_k(p), u_l \nabla_{E_i} E_l(p) + E_i(u_l)(p) E_l(p) \rangle}{|grad(u)|^{n+2}} \right) \\ &= \mathcal{T}_{ij}^u \left( \frac{E_i(u_j)(p)}{|grad(u)|^n} - n u_j u_k \frac{\langle E_k(p), E_i(u_l)(p) E_l(p) \rangle}{|grad(u)|^{n+2}} \right) \\ &= \mathcal{T}_{ij}^u \left( \frac{E_i(u_j)(p)}{|grad(u)|^n} - n u_j u_k E_i(u_l)(p) \frac{\langle E_k, E_l \rangle(p)}{|grad(u)|^{n+2}} \right) \\ &= \mathcal{T}_{ij}^u \left( \frac{E_i(u_j)(p)}{|grad(u)|^n} - n \frac{u_j u_k E_i(u_l)(p) \delta_{kl}}{|grad(u)|^{n+2}} \right) \\ &= \mathcal{T}_{ij}^u \left( \frac{E_i(u_j)(p)}{|grad(u)|^n} - n \frac{u_j u_k E_i(u_k)(p)}{|grad(u)|^{n+2}} \right). \end{aligned}$$

Por (77) temos que  $E_i(u_j)(p) = u_{ji}(p)$  e  $E_i(u_k)(p) = u_{ki}(p)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{ij}^u \left( E_i \left( \frac{u_j}{|grad(u)|} \right) \right) (p) &= \mathcal{T}_{ij}^u \left( \frac{E_i(u_j)(p)}{|grad(u)|^n} - n \frac{u_j u_k E_i(u_k)(p)}{|grad(u)|^{n+2}} \right) \\ &= \mathcal{T}_{ij}^u \left( \frac{u_{ji}(p)}{|grad(u)|^n} - n \frac{u_j u_k u_{ki}(p)}{|grad(u)|^{n+2}} \right) \\ &= \mathcal{T}_{ij}^u \left( \frac{u_{ji}}{|grad(u)|^n} - n \frac{u_j u_k u_{ki}}{|grad(u)|^{n+2}} \right) (p) \end{aligned}$$

Mas como  $(\mathcal{T}_{ij}^u) = \det(u_{ij})(u_{ij})^{-1}$  temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{ij}^u \left( E_i \left( \frac{u_j}{|grad(u)|} \right) \right) (p) &= \mathcal{T}_{ij}^u \left( \frac{u_{ji}}{|grad(u)|^n} - n \frac{u_j u_k u_{ki}}{|grad(u)|^{n+2}} \right) (p) \\ &= \det(u_{ij})(u_{ij})^{-1} \left( \frac{u_{ji}}{|grad(u)|^n} - n \frac{u_j u_k u_{ki}}{|grad(u)|^{n+1}} \right) (p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \frac{\det(u_{ij})}{|\text{grad}(u)|^n} - n \frac{u_j u_k \delta_{kj} \det(u_{ij})}{|\text{grad}(u)|^{n+2}} \\
&= n \frac{\det(u_{ij})}{|\text{grad}(u)|^n} - n \frac{u_j u_j \det(u_{ij})}{|\text{grad}(u)|^{n+2}} \\
&= n \frac{\det(u_{ij})}{|\text{grad}(u)|^n} - n \frac{\det(u_{ij})}{|\text{grad}(u)|^n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

**Definição 3.53.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $p \in M$  um ponto arbitrário. Dizemos que  $p$  é um **ponto regular** de uma função  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  se  $u$  é de classe  $C^1$  em uma vizinhança aberta de  $p$  e  $\text{grad}(u)(p) \neq 0$ .

**Definição 3.54.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que  $x \in \mathbb{R}$  é um **valor regular** de  $u$  se todo  $p \in u^{-1}(x)$  é um ponto regular de  $u$ .

**Definição 3.55.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $x \in \mathbb{R}$  um valor regular de  $u$ . Dizemos que o conjunto  $u^{-1}(x) \subset M$  é **conjunto de nível regular** de  $u$ .

**Lema 3.56.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $\Gamma \subset M$  um conjunto de nível regular de  $u$  que limita um domínio  $\Omega$  e  $\gamma \subset M$  outro conjunto de nível regular de  $u$  que limita um domínio  $D$  tal que  $D \subset \Omega$ . Considere que  $u$  é de classe  $C^{2,1}$  em  $cl(\Omega) \setminus D$  e  $\text{grad}(u)$  é o normal para fora ao longo de  $\Gamma$  e  $\gamma$  com respeito aos seus correspondentes domínios. Além disso, assuma que  $|\text{grad}(u)| \neq 0$  e  $\nabla^2(u)$  é não degenerada em quase todo ponto  $p \in cl(\Omega) \setminus D$ . Seja  $d\mu$  a medida de volume Riemanniano  $n$ -dimensional em  $M$  e  $d\sigma$  a medida de volume Riemanniana  $(n-1)$ -dimensional ou a medida de área de uma hipersuperfície. Então

$$\mathcal{G}(\Gamma) - \mathcal{G}(\gamma) = \int_{\Omega \setminus D} \left\langle \text{div}(\mathcal{T}^u), \frac{\text{grad}(u)}{|\text{grad}(u)|^n} \right\rangle d\mu.$$

*Demonstração.* Primeiramente, note que, pelo Lema 3.52 temos que

$$\left\langle \text{div}_p(\mathcal{T}^u), \frac{\text{grad}(u)}{|\text{grad}(u)|^n} \right\rangle = \text{div}_p \left( \mathcal{T}^u \left( \frac{\text{grad}(u)}{|\text{grad}(u)|^n} \right) \right).$$

Logo, temos que,

$$\int_{\Omega \setminus D} \left\langle \text{div}(\mathcal{T}^u), \frac{\text{grad}(u)}{|\text{grad}(u)|^n} \right\rangle d\mu = \int_{\Omega \setminus D} \text{div}_p \left( \mathcal{T}^u \left( \frac{\text{grad}(u)}{|\text{grad}(u)|^n} \right) \right) d\mu.$$

Pelo Teorema da divergência, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus D} \left\langle \operatorname{div}(\mathcal{T}^u), \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|^n} \right\rangle d\mu &= \int_{\Omega \setminus D} \operatorname{div}_p \left( \mathcal{T}^u \left( \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|^n} \right) \right) d\mu \\ &= \int_{\partial(\Omega \setminus D)} \left\langle \mathcal{T}^u \left( \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|^n} \right), \nu \right\rangle d\sigma \\ &= \int_{\Gamma \cup \gamma} \left\langle \mathcal{T}^u \left( \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|^n} \right), \nu \right\rangle d\sigma, \end{aligned}$$

onde  $\nu$  é o normal para fora de  $\partial(\Omega \setminus D) = \Gamma \cup \gamma$ . Note que  $\nu = \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|}$  em  $\Gamma$  e  $\nu = -\frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|}$  em  $\gamma$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus D} \left\langle \operatorname{div}(\mathcal{T}^u), \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|^n} \right\rangle d\mu &= \int_{\Gamma \cup \gamma} \left\langle \mathcal{T}^u \left( \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|^n} \right), \nu \right\rangle d\sigma \\ &= \int_{\Gamma} \left\langle \mathcal{T}^u \left( \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|^n} \right), \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|} \right\rangle d\sigma + \\ &\quad + \int_{\gamma} \left\langle \mathcal{T}^u \left( \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|^n} \right), -\frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|} \right\rangle d\sigma \\ &= \int_{\Gamma} \left\langle \mathcal{T}^u \left( \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|^n} \right), \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|} \right\rangle d\sigma - \\ &\quad - \int_{\gamma} \left\langle \mathcal{T}^u \left( \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|^n} \right), \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|} \right\rangle d\sigma \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\langle \mathcal{T}^u(\operatorname{grad}(u)), \operatorname{grad}(u) \rangle}{|\operatorname{grad}(u)|^{n+1}} d\sigma - \\ &\quad - \int_{\gamma} \frac{\langle \mathcal{T}^u(\operatorname{grad}(u)), \operatorname{grad}(u) \rangle}{|\operatorname{grad}(u)|^{n+1}} d\sigma. \end{aligned}$$

Mas, pelo Lema 3.50 temos que  $GK(p) = \frac{\langle \mathcal{T}^u(\operatorname{grad}(u)), \operatorname{grad}(u) \rangle}{|\operatorname{grad}(u)|^{n+1}}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus D} \left\langle \operatorname{div}(\mathcal{T}^u), \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|^n} \right\rangle d\mu &= \int_{\Gamma} \frac{\langle \mathcal{T}^u(\operatorname{grad}(u)), \operatorname{grad}(u) \rangle}{|\operatorname{grad}(u)|^{n+1}} d\sigma - \\ &\quad - \int_{\gamma} \frac{\langle \mathcal{T}^u(\operatorname{grad}(u)), \operatorname{grad}(u) \rangle}{|\operatorname{grad}(u)|^{n+1}} d\sigma d\sigma \\ &= \int_{\Gamma} GK(p) d\sigma - \int_{\gamma} GK(q) d\sigma \\ &= \mathcal{G}(\Gamma) - \mathcal{G}(\gamma). \end{aligned}$$

□

**Observação 3.57.** Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional e  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^{1,1}$  em  $M$ . Então, pelo Teorema de Rademacher,  $u$  é duas vezes diferenciável em quase todo ponto de  $M$ .

Sejam  $p \in M$  um ponto no qual  $u$  seja duas vezes diferenciável e  $E_i, i = 1, \dots, n$ , um campo referencial ortogonal suave em uma vizinhança  $V$  de  $p$ .

Note que

$$E_i(\det(\nabla^2(u))) = E_i(\mathcal{T}_{rl}^u u_{rl}) = \mathcal{T}_{rl}^u E_i(u_{rl}) = \mathcal{T}_{rl}^u u_{rl}, \quad (86)$$

onde  $u_{rki} = E_i(u_{rk})$ . Note também que, pela expressão do tensor de Riemann  $R$  em coordenadas e como  $[E_i, E_j] = 0$ , temos

$$\begin{aligned} u_{rik} - u_{rki} &= E_k(u_{ri}) - E_i(u_{rk}) = E_k(E_i(u_r)) - E_i(E_k(u_r)) \\ &= \nabla_{E_k} \nabla_{E_i} u_r - \nabla_{E_i} \nabla_{E_k} u_r + \nabla_{[E_i, E_k]} u_r \\ &= R(E_i, E_k)(u_r) = R_{kir}^l u_l = R_{kirm} g^{ml} u^l = R_{kirm} \langle E_m, E_l \rangle u^l \\ &= R_{kirm} \delta_{ml} u^l = R_{kirl} u_l. \end{aligned} \quad (87)$$

**Lema 3.58.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $\Gamma \subset M$  um conjunto de nível regular de  $u$  que limita um domínio  $\Omega$ . Considere que  $u$  é de classe  $C^{2,1}$  em  $\Omega$ . Além disso, assuma que  $|\text{grad}(u)| \neq 0$  e  $\nabla^2(u)$  é não degenerada em quase todo ponto  $p \in \Omega$ . Seja  $p \in \Omega$  um ponto no qual  $u$  é três vezes diferenciável. Considere  $E_i$  um referencial ortogonal em  $p \in \Omega$  então

$$\begin{aligned} \langle \text{div}(\mathcal{T}^u), \text{grad}(u) \rangle &= \frac{R(\mathcal{T}^u(\text{grad}(u)), \mathcal{T}^u(E_i), E_i, \text{grad}(u))}{\det(\nabla^2(u))} \\ &= \frac{R(\mathcal{T}^u(\text{grad}(u)), E_i, \mathcal{T}^u(E_i), \text{grad}(u))}{\det(\nabla^2(u))}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Pela Definição 3.51 e por (75) temos que

$$\langle \text{div}(\mathcal{T}^u), \text{grad}(u) \rangle = \langle E_i(\mathcal{T}_{ij}^u) E_j, u_k E_k \rangle = E_i(\mathcal{T}_{ij}^u) u_k \langle E_j, E_k \rangle = E_i(\mathcal{T}_{ij}^u) u_j. \quad (88)$$

De (78) temos que

$$E_i(\mathcal{T}_{ij}^u) = E_i(u^{ij} \det(\nabla^2(u))) = E_i(u^{ij}) \det(\nabla^2(u)) + u^{ij} E_i(\det(\nabla^2(u))). \quad (89)$$

Agora, note que  $u^{ir} u_{rk} u^{kj} = \delta_{ik} u^{kj} = u^{ij}$ . Logo, temos que

$$E_i(u^{ij}) = E_i(u^{ir} u_{rk} u^{kj}) = E_i(u^{ir}) u_{rk} u^{kj} = -u^{ir} E_i(u_{ir}) u^{ir} u_{rk} u^{kj} = -u^{ir} E_i(u_{ir}) u^{ij}. \quad (90)$$

Reindexando (90) para  $i \rightarrow k$  obtemos

$$E_i(u^{ij}) = -u_{ir} E_i(u_{ir}) u^{ij} = -u^{ir} E_i(u_{kr}) u^{kj} = -u^{ir} u^{kj} E_i(u_{rk}) = -u^{ir} u^{kj} u_{rk}. \quad (91)$$

Substituindo (91) e (86) em (89) e usando (78), obtemos

$$\begin{aligned}
 E_i(\mathcal{T}_{ij}^u) &= E_i(u^{ij}) \det(\nabla^2(u)) + u^{ij} E_i(\det(\nabla^2(u))) \\
 &= -u^{ir} u^{kj} u_{rki} \det(\nabla^2(u)) + u^{ij} \mathcal{T}_{rl}^u u_{rli} \\
 &= u^{ij} \det(\nabla^2(u)) u^{rl} u_{rli} - u^{ir} u^{kj} u_{rki} \det(\nabla^2(u)) \\
 &= \det(\nabla^2(u)) (u^{ij} u^{rl} u_{rli} - u^{ir} u^{kj} u_{rki}).
 \end{aligned} \tag{92}$$

Reindexando (92) para  $i \rightarrow k$  e  $l \rightarrow i$  e usando (87) obtemos

$$\begin{aligned}
 E_i(\mathcal{T}_{ij}^u) &= \det(\nabla^2(u)) (u^{ij} u^{rl} u_{rli} - u^{ir} u^{kj} u_{rki}) \\
 &= \det(\nabla^2(u)) (u^{kj} u^{ri} u_{rik} - u^{ir} u^{kj} u_{rki}) \\
 &= \det(\nabla^2(u)) u^{ir} u^{kj} (u_{rik} - u_{rki}) \\
 &= \det(\nabla^2(u)) u^{ir} u^{kj} R_{kirl} u_l.
 \end{aligned} \tag{93}$$

Substituindo (93) em (88) obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle \operatorname{div}(\mathcal{T}^u), \operatorname{grad}(u) \rangle &= E_i(\mathcal{T}_{ij}^u) u_j \\
 &= \det(\nabla^2(u)) u^{ir} u^{kj} R_{kirl} u_l u_j \\
 &= \det(\nabla^2(u)) u^{ir} u^{kj} R(E_k, E_i, E_r, u_l E_l) u_j \\
 &= \det(\nabla^2(u)) R(u^{kj} E_k u_j, E_i, u^{ir} E_r, u_l E_l) \\
 &= \det(\nabla^2(u)) R(u^{jk} E_k u_j, E_i, u^{ir} E_r, u_l E_l)
 \end{aligned} \tag{94}$$

Por (78) e (79) temos que  $u^{ir} E_r = \frac{(\mathcal{T}_{ir}^u) E_r}{\det(\nabla^2(u))} = \frac{\mathcal{T}^u(E_i)}{\det(\nabla^2(u))}$  e  $u^{jk} E_k u_j = \frac{(\mathcal{T}_{jk}^u) u_j E_k}{\det(\nabla^2(u))} = \frac{\mathcal{T}^u(\operatorname{grad}(u))}{\det(\nabla^2(u))}$ . Portanto, usando isso em (94) obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle \operatorname{div}(\mathcal{T}^u), \operatorname{grad}(u) \rangle &= \det(\nabla^2(u)) R(u^{jk} E_k u_j, E_i, u^{ir} E_r, u_l E_l) \\
 &= \det(\nabla^2(u)) R \left( \frac{\mathcal{T}^u(\operatorname{grad}(u))}{\det(\nabla^2(u))}, E_i, \frac{\mathcal{T}^u(E_i)}{\det(\nabla^2(u))}, \operatorname{grad}(u) \right) \\
 &= \frac{R(\mathcal{T}^u(\operatorname{grad}(u)), E_i, \mathcal{T}^u(E_i), \operatorname{grad}(u))}{\det(\nabla^2(u))}.
 \end{aligned} \tag{95}$$

Por fim, multiplicando (94) por  $u^{li} u_{li} = I$  e depois reindexando por  $l \rightarrow i$  obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle \operatorname{div}(\mathcal{T}^u), \operatorname{grad}(u) \rangle &= \det(\nabla^2(u)) R(u^{jk} E_k u_j, E_i, u^{ir} E_r, u_l E_l) \\
 &= \det(\nabla^2(u)) u^{li} u_{li} R(u^{jk} E_k u_j, E_i, u^{ir} E_r, u_l E_l)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det(\nabla^2(u)) R(u^{jk} E_k u_j, u^{li} E_i, u_{li} u^{ir} E_r, u_l E_l) \\
&= \det(\nabla^2(u)) R(u^{jk} E_k u_j, u^{li} E_i, \delta_{lr} E_r, u_l E_l) \\
&= \det(\nabla^2(u)) R(u^{jk} E_k u_j, u^{li} E_i, E_l, u_l E_l) \\
&= \det(\nabla^2(u)) R\left(\frac{\mathcal{T}^u(\text{grad}(u))}{\det(\nabla^2(u))}, \frac{\mathcal{T}^u(E_l)}{\det(\nabla^2(u))}, E_l, \text{grad}(u)\right) \\
&= \det(\nabla^2(u)) R\left(\frac{\mathcal{T}^u(\text{grad}(u))}{\det(\nabla^2(u))}, \frac{\mathcal{T}^u(E_i)}{\det(\nabla^2(u))}, E_i, \text{grad}(u)\right) \\
&= \frac{R(\mathcal{T}^u(\text{grad}(u)), \mathcal{T}^u(E_i), E_i, \text{grad}(u))}{\det(\nabla^2(u))} \tag{96}
\end{aligned}$$

Portanto, por (95) e (96) temos o requerido.  $\square$

**Corolário 3.59.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $\Gamma \subset M$  um conjunto de nível regular de  $u$  que limita um domínio  $\Omega$  e  $\gamma \subset M$  outro conjunto de nível regular de  $u$  que limita um domínio  $D$  tal que  $D \subset \Omega$ . Considere que  $u$  é de classe  $C^{2,1}$  em  $cl(\Omega) \setminus D$  e  $\text{grad}(u)$  é o normal para fora ao longo de  $\Gamma$  e  $\gamma$  com respeito aos seus correspondentes domínios. Além disso, assuma que  $|\text{grad}(u)| \neq 0$  e  $\nabla^2(u)$  é não degenerada em quase todo ponto  $p \in cl(\Omega) \setminus D$ . Seja  $d\mu$  a medida de volume Riemanniano  $n$ -dimensional em  $M$  e  $d\sigma$  a medida de volume Riemanniana  $(n-1)$ -dimensional ou a medida de área de uma hipersuperfície. Considere  $E_i$  um referencial ortogonal em  $p \in \Omega$  então*

$$\mathcal{G}(\Gamma) - \mathcal{G}(\gamma) = \int_{\Omega \setminus D} \frac{R(\mathcal{T}^u(\text{grad}(u)), \mathcal{T}^u(E_i), E_i, \text{grad}(u))}{|\text{grad}(u)|^n \det(\nabla^2(u))} d\mu.$$

*Demonstração.* A prova é imediatamente dos Lemas 3.56 e 3.58.  $\square$

**Lema 3.60.** *Seja  $A$  uma matriz simétrica  $n \times n$ , com submatriz principal  $(n-1) \times (n-1)$  diagonal, dada por*

$$\begin{pmatrix} b_1 & & O & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ O & & b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a \end{pmatrix},$$

e seja  $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$  a matriz de cofatores de  $A$ . Então

1.  $\bar{a}_{in} = -a_i \prod_{l \neq i} b_l$ ; para  $i < n$ .
2.  $\bar{a}_{ij} = a_i a_j \prod_{l \neq i, j} b_l$ ; para  $i, j < n$  e  $i \neq j$ .
3.  $\bar{a}_{ii} = a \prod_{l \neq i} b_l - \sum_{k \neq i} a_k^2 \prod_{l \neq k, i} b_l$ ; para  $i < n$ .

4.  $\det(A) = a \prod_l b_l - \sum_k a_k^2 \prod_{l \neq k} b_l.$

5. Para  $b_1, \dots, b_{n-1}$  fixados, a tendendo para infinito e  $|a_i| < C$  (independente de  $a$ ), os autovalores de  $A$  satisfazem  $\lambda_\alpha = b_\alpha + o(1)$  para  $\alpha < n$  e  $\lambda_n = a + \mathcal{O}(1)$ , onde  $o(1)$  e  $\mathcal{O}(1)$  dependem uniformemente somente de  $b_1, \dots, b_{n-1}$  e  $C$ . Em particular,

$$\det(A) = a \prod_i b_i + \mathcal{O}(1).$$

*Demonação.* (1): Primeiramente, note que para calcular o cofator do elemento  $a_{in}$ ,  $i < n$ , temos que calcular o determinante da seguinte matriz subjacente

$$\begin{pmatrix} b_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & b_i & \dots & 0 & a_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_i & \dots & a_{n-1} & a \end{pmatrix}.$$

Para isso vamos usar o Teorema de Laplace para calcular o determinante e faremos essa expansão sobre a  $i$ -ésima coluna da matriz subjacente mas, por construção, temos que todos os elementos dessa coluna são nulos a menos do elemento  $a_{ni} = a_i$ . Além disso, a matriz subjacente ao cálculo desse determinante é diagonal.

$$\begin{pmatrix} b_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & b_i & \dots & 0 & a_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_i & \dots & a_{n-1} & a \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\bar{a}_{in} = (-1)^{i+n} a_{ni} (-1)^{n-1+i} \prod_{l \neq i} b_l = (-1)^{2(n+i)-1} a_i \prod_{l \neq i} b_l = -a_i \prod_{l \neq i} b_l.$$

(2): Primeiramente, note que para calcular o cofator do elemento  $a_{ij}$ ,  $i, j < n$   $i \neq j$ , temos que calcular o determinante da seguinte matriz subjacente

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} b_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & b_i & \dots & 0 & \dots & 0 & a_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & b_j & \dots & 0 & a_j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_i & \dots & a_j & \dots & a_{n-1} & a \end{array} \right).$$

Para isso vamos usar o Teorema de Laplace para calcular o determinante e faremos essa expansão sobre a  $i$ -ésima coluna da matriz subjacente mas, por construção, temos que todos os elementos dessa coluna são nulos a menos do elemento  $a_{ni} = a_i$ . Além disso, a matriz subjacente ao cálculo desse determinante é dada por

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} b_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & b_i & \dots & 0 & \dots & 0 & a_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & b_j & \dots & 0 & a_j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_i & \dots & a_j & \dots & a_{n-1} & a \end{array} \right).$$

Logo, trocando a  $j$ -ésima linha com a  $(j+1)$ -ésima linha. Depois trocando a  $(j+1)$ -ésima linha com a  $(j+2)$ -ésima linha e, assim, sucessivamente até a  $(n-1)$ -ésima linha obtemos que fizemos  $n-1-j$  trocas. Portanto,

$$\bar{a}_{ij} = (-1)^{i+j} a_i (-1)^{n-1+i} (-1)^{n-1-j} a_j \prod_{l \neq i,j} b_l = (-1)^{2(n+i-1)} a_i a_j \prod_{l \neq i,j} b_l = a_i a_j \prod_{l \neq i,j} b_l.$$

(3): Primeiramente, note que para calcular o cofator do elemento  $a_{ii}$ ,  $i < n$ , temos que calcular o determinante da seguinte matriz subjacente

$$\left( \begin{array}{cc|cc|cc} b_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & b_i & \dots & 0 & a_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_i & \dots & a_{n-1} & a \end{array} \right).$$

Para isso vamos usar o Teorema de Laplace para calcular o determinante e faremos essa expansão sobre a  $(n-1)$ -ésima coluna da matriz subjacente. Donde obtemos que

$$\bar{a}_{ii} = (-1)^{n-1+n-1} a \prod_{l \neq i} b_l + \sum_{k \neq i} a_k \bar{a}_{kn}.$$

Usando o item (1) do Lema 3.60 temos que  $\bar{a}_{kn} = -a_k \prod_{l \neq k} b_l$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{a}_{ii} &= (-1)^{n-1+n-1} a \prod_{l \neq i} b_l + \sum_{k \neq i} a_k \bar{a}_{kn} \\ &= (-1)^{2(n-1)} a \prod_{l \neq i} b_l + \sum_{k \neq i} a_k (-a_k \prod_{l \neq k} b_l) \\ &= a \prod_{l \neq i} b_l - \sum_{k \neq i} a_k^2 \prod_{l \neq k} b_l. \end{aligned}$$

(4): Para calcularmos o determinante da matriz  $A$  vamos usar o Teorema de Laplace usando  $n$ -ésima coluna para expansão. Assim, obtemos que

$$\det(A) = (-1)^{n+n} a \prod_l b_l + \sum_k a_k \bar{a}_{kn}.$$

Usando o item (1) do Lema 3.60 temos que  $\bar{a}_{kn} = -a_k \prod_{l \neq k} b_l$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{n+n} a \prod_l b_l + \sum_k a_k \bar{a}_{kn} \\ &= (-1)^{2n} a \prod_l b_l + \sum_k a_k (-a_k \prod_{l \neq k} b_l) \\ &= a \prod_l b_l - \sum_k a_k^2 \prod_{l \neq k} b_l. \end{aligned}$$

(5): Primeiramente note que os autovalores  $\lambda$  de  $A$  satisfazem que

$$\det \begin{pmatrix} b_1 - \lambda & & & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & b_{n-1} - \lambda & a_{n-1} \\ \mathbf{0} & \dots & a_{n-1} & a - \lambda \end{pmatrix} = 0. \quad (97)$$

Multiplicando por  $\frac{1}{a}$  ambos os lados de (97) obtemos que:

$$\det \begin{pmatrix} b_1 - \lambda & \mathbf{0} & \frac{a_1}{a} \\ \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & b_{n-1} - \lambda & \frac{a_{n-1}}{a} \\ a_1 & \dots & 1 - \frac{\lambda}{a} \end{pmatrix} = 0.$$

Como o determinante é uma função contínua, podemos fazer  $a \rightarrow \infty$  e obtemos:

$$\det \begin{pmatrix} b_1 - \lambda & \mathbf{0} & 0 \\ \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & b_{n-1} - \lambda & 0 \\ a_1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Donde temos, pelo item (4) do Lema 3.60, que  $\prod_{l=1}^{n-1} (b_l - \lambda) = 0$ . Assim, os números  $b_1, \dots, b_{n-1}$  são raízes simples e, pela dependência contínua das raízes com relação aos parâmetros do polinômio, temos que  $\lambda_\alpha = b_\alpha + o(1)$  para  $\alpha < n$ .

Para achar o último autovalor, fazemos a mudança  $\lambda = a\mu$  em (97) e obtemos

$$\det \begin{pmatrix} b_1 - a\mu & \mathbf{0} & a_1 \\ \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & b_{n-1} - a\mu & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a - a\mu \end{pmatrix} = 0. \quad (98)$$

Multiplicando por  $\frac{1}{a^n}$  ambos os lados de (98) obtemos que:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a} - \mu & \mathbf{0} & \frac{a_1}{a} \\ \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \frac{b_{n-1}}{a} - \mu & \frac{a_{n-1}}{a} \\ \frac{a_1}{a} & \dots & 1 - \mu \end{pmatrix} = 0.$$

Como o determinante é uma função contínua, podemos fazer  $a \rightarrow \infty$  e obtemos:

$$\det \begin{pmatrix} -\mu & \mathbf{0} & 0 \\ \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & -\mu & 0 \\ 0 & \dots & 1 - \mu \end{pmatrix} = 0.$$

Donde temos que  $(-\mu)^{n-1}(1 - \mu) = 0$  e, portanto,  $\mu = 1$  é uma raiz simples. Portanto, 1 é uma raiz simples e, pela dependência contínua das raízes com relação aos parâmetros do polinômio, temos que  $\mu = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{a}\right)$ . Ou ainda,  $\lambda_n = a + \mathcal{O}(1)$ .  $\square$

**Definição 3.61.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $\mathcal{C}^1$ . Considere  $p \in M$  um ponto regular de  $u$ . Dizemos que  $E_1, \dots, E_n \in T_p M$  é o **referencial principal de  $u$  em  $p$**  se  $E_n = -\frac{\text{grad}(u)(p)}{|\text{grad}(u)(p)|}$  e  $E, \dots, E_{n-1}$  são as direções principais do conjunto de nível regular  $u^{-1}(u(p))$  em  $p$  com respeito a  $-E_n$ .*

**Teorema 3.62** (Fórmula de comparação, primeira versão). *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $\Gamma \subset M$  um conjunto de nível regular de  $u$  que limita um domínio  $\Omega$  e  $\gamma \subset M$  outro conjunto de nível regular de  $u$  que limita um domínio  $D$  tal que  $D \subset \Omega$ . Suponha que  $\text{grad}(u)$  é o normal para fora ao longo de  $\Gamma$  e  $\gamma$  com respeito aos seus respectivos domínios. Além disso, suponha que  $u$  é de classe  $\mathcal{C}^{2,1}$  em  $cl(\Omega) \setminus D$  e, em quase todo ponto de  $cl(\Omega) \setminus D$ ,  $\text{grad}(u) \neq 0$  e  $\nabla^2(e^u)$  é não degenerada. Seja  $d\mu$  a medida de volume Riemanniano  $n$ -dimensional em  $M$ . Então,*

$$\mathcal{G}(\Gamma) - \mathcal{G}(\gamma) = - \int_{\Omega \setminus D} R_{rnrr} \frac{GK}{\kappa_r} d\mu + \int_{\Omega \setminus D} R_{rkrr} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|\text{grad}(u)|} d\mu,$$

onde todas as quantidades são calculadas com respeito ao referencial principal de  $u$  e  $k \leq n - 1$ .

*Demonstração.* Considere  $w(p) = (\phi \circ u)(p)$ , onde  $\phi(t) = \frac{e^{th} - 1}{h}$ , para  $h > 0$ . Note que  $\Gamma$  e  $\gamma$  serão conjuntos de níveis regulares de  $w$ .

De fato, como  $\Gamma$  e  $\gamma$  são conjuntos de níveis regulares de  $u$  temos que existem  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tais que

$$\Gamma = \{p \in M : u(p) = t_1\} = \{p \in M : \phi(u(p)) = \phi(t_1)\} = \{p \in M : w(p) = \phi(t_1)\}$$

e

$$\gamma = \{p \in M : u(p) = t_2\} = \{p \in M : \phi(u(p)) = \phi(t_2)\} = \{p \in M : w(p) = \phi(t_2)\}.$$

Além disso,  $\text{grad}(w) \neq 0$ . Primeiro calculemos o gradiente de  $w$ . Para  $p \in M$  e  $v \in T_p M$  arbitrários temos que

$$\begin{aligned} \langle \text{grad}(w)(p), v \rangle &= \langle \text{grad}(\phi \circ u)(p), v \rangle \\ &= d_p(\phi \circ u)(v) \\ &= d_{u(p)}\phi(d_p u(v)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi'(u(p))(d_p u(v)) \\
&= \phi'(u(p)) \langle \text{grad}(u)(p), v \rangle \\
&= \langle \phi'(u(p)) \text{grad}(u)(p), v \rangle.
\end{aligned} \tag{99}$$

Portanto,  $\text{grad}(w) = \phi'(u) \text{grad}(u)$ , mas como  $\phi'(u) = e^{hu}$  e  $\text{grad}(u) \neq 0$ , pois  $\Gamma$  e  $\gamma$  são conjuntos de níveis regulares, temos que  $\text{grad}(w) \neq 0$ .

Além disso,  $\nabla^2(w)$  é não degenerada em quase todo ponto. De fato, para  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e usando (99) temos que

$$\begin{aligned}
\nabla^2(w)(X) &= \nabla_X \text{grad}(w) \\
&= \nabla_X(\phi'(u) \text{grad}(u)) \\
&= \phi'(u) \nabla_X \text{grad}(u) + X(\phi'(u)) \text{grad}(u) \\
&= \phi'(u) \nabla^2(u)(X) + \phi''(u) X(u) \text{grad}(u) \\
&= \phi'(u) \nabla^2(u)(X) + h \phi'(u) X(u) \text{grad}(u) \\
&= \phi'(u) \left( \nabla^2(u)(X) + h \text{grad}(u) \langle \text{grad}(u), X \rangle \right).
\end{aligned} \tag{100}$$

Logo, como  $\phi'(u) = e^{hu}$ ,  $h > 0$ ,  $\text{grad}(u) \neq 0$  e  $\nabla^2(u)$  é não degenerada em quase todo ponto, temos que  $\nabla^2(w)$  é não degenerada em quase todo ponto.

Assim, do Corolário 3.59 para  $w$ , temos que

$$\mathcal{G}(\Gamma) - \mathcal{G}(\gamma) = \int_{\Omega \setminus D} \frac{R(\mathcal{T}^w(\text{grad}(w)), E_i, \mathcal{T}^w(E_i), \text{grad}(w))}{|\text{grad}(w)|^n \det(\nabla^2(w))} d\mu. \tag{101}$$

Seja  $p$  um ponto do conjunto de nível  $\{p \in M : w(p) = \phi(t)\}$  e  $E_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , o referencial principal de  $w$  em  $p$ . Note que  $w_i(p) = 0$ ,  $i < n$ , e  $|w_n| = |\text{grad}(w)|$ .

De fato, como  $E_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , é o referencial principal de  $w$  em  $p$ , temos que  $E_n = -\frac{\text{grad}(w)(p)}{|\text{grad}(w)(p)|}$  e, portanto,

$$w_n = \langle \text{grad}(w), E_n \rangle = \langle -|\text{grad}(w)| E_n, E_n \rangle = -|\text{grad}(w)| \langle E_n, E_n \rangle = -|\text{grad}(w)|.$$

Donde segue-se que  $|w_n| = |\text{grad}(w)|$ . Por outro lado, para  $i < n$ , temos que

$$w_i = \langle \text{grad}(w), E_i \rangle = \langle -|\text{grad}(w)| E_n, E_i \rangle = -|\text{grad}(w)| \langle E_n, E_i \rangle = 0.$$

Por (94) e (96) temos que o integrando do lado direito de (101) é dado por

$$\frac{R(\mathcal{T}^w(\text{grad}(w)), E_i, \mathcal{T}^w(E_i), \text{grad}(w))}{|\text{grad}(w)|^n \det(\nabla^2(w))} = \frac{\det(\nabla^2(w)) w^{kj} w^{ir} R_{kirl} w_l w_j}{|\text{grad}(w)|^n}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\det(\nabla^2(w))w^{kn}w^{ir}R_{kiran}w_nw_n}{|\text{grad}(w)|^n} \\
&= \frac{\det(\nabla^2(w))w^{kn}w^{ir}R_{kiran}}{|\text{grad}(w)|^{n-2}}. \tag{102}
\end{aligned}$$

Note que  $(w_{ij}) = \phi'(u)(a_{ij})$ , onde  $a_{ij} = u_{ij} + hu_iu_j$ . De fato, por (100), temos que

$$\begin{aligned}
w_{ij} &= \text{Hess}(w)(E_j, E_j) \\
&= \langle \nabla^2(w)(E_i), E_j \rangle \\
&= \left\langle \phi'(u) \left( \nabla^2(u)(E_i) + h\text{grad}(u)\langle \text{grad}(u), E_i \rangle \right), E_j \right\rangle \\
&= \phi'(u) \left( \langle \nabla^2(u)(E_i), E_j \rangle + \langle h\text{grad}(u)\langle \text{grad}(u), E_i \rangle, E_j \rangle \right) \\
&= \phi'(u) \left( \text{Hess}(u)(E_i, E_j) + h\langle \text{grad}(u), E_i \rangle \langle \text{grad}(u), E_j \rangle \right) \\
&= \phi'(u)(u_{ij} + hu_iu_j).
\end{aligned}$$

Note também que  $u_i(p) = 0$ ,  $i < n$ , e  $u_n = -\text{grad}(u)$  analogamente a  $w_i(p) = 0$ ,  $i < n$ , e  $|w_n| = |\text{grad}(w)|$ . Além disso, por (8o) temos que  $u_{kk} = |\text{grad}(u)|\kappa_k$ . Disto segue que

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} |\text{grad}(u)|\kappa_1 & & & u_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & |\text{grad}(u)|\kappa_{n-1} & u_{(n-1)n} \\ \text{O} & & u_{1n} & \dots & u_{(n-1)n} & u_{nn} + h|\text{grad}(u)|^2 \end{pmatrix}$$

Seja  $(\bar{a}_{ij})$  a matriz de cofatores de  $(a_{ij})$ . Note que  $(\bar{w}_{ij}) = \det(\nabla^2(w))w^{ij} = \phi'(u)^{n-1}(\bar{a}_{ij})$ . De fato, como para uma matriz quadrada invertível  $A$  temos que  $C^T = \det(A)A^{-1}$ , onde  $C^T$  é a transposta da matriz de cofatores de  $A$ , temos que  $(\bar{w}_{ij})^T = \det(\nabla^2(w))w^{ij}$ ; que implica em  $(\bar{w}_{ij}) = \det(\nabla^2(w))w^{ij}$ . Por outro lado, temos que  $(w_{ij}) = \phi'(u)(a_{ij})$  e multiplicando ambos os lados à direita por  $(w^{ij})$  obtemos  $\phi'(u)(a_{ij})(w^{ij}) = \text{Id}$ , isto é,  $(w^{ij}) = \frac{(a^{ij})}{\phi'(u)}$ . Portanto,  $(\bar{w}_{ij}) = \det(\nabla^2(w))(w^{ij}) = \det(\nabla^2(w))\frac{(a^{ij})}{\phi'(u)}$ . Por fim, como  $(w_{ij}) = \phi'(u)(a_{ij})$ , temos que  $\det(\nabla^2(w)) = \det((w_{ij})) = (\phi'(u))^n \det((a_{ij}))$ . Donde concluímos que  $(\bar{w}_{ij}) = \det(\nabla^2(w))\frac{(a^{ij})}{\phi'(u)} = (\phi'(u))^n \det((a_{ij}))\frac{(a^{ij})}{\phi'(u)} = (\phi'(u))^{n-1}(\bar{a}_{ij})$ .

Por (99) temos que  $|\text{grad}(w)| = \phi'(u)|\text{grad}(u)|$ . Assim, pelo exposto acima e por (102) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{R(\mathcal{T}^w(\text{grad}(w)), E_i, \mathcal{T}^w(E_i), \text{grad}(w))}{|\text{grad}(w)|^n \det(\nabla^2(w))} &= \frac{\det(\nabla^2(w))w^{kn}w^{ir}R_{kiran}}{|\text{grad}(w)|^{n-2}} \\
&= \frac{(\det(\nabla^2(w))a^{kn}a^{ir}R_{kiran})}{\phi'(u)\phi'(u)|\text{grad}(w)|^{n-2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(det(\nabla^2(w))\bar{a}_{kn}\bar{a}_{ir}R_{kiran})}{\phi'(u)det(a_{kn})\phi'(u)det(a_{ir})|grad(w)|^{n-2}} \\
&= \frac{det(\nabla^2(w))(\phi'(u))^{n-1}(\phi'(u))^{n-1}\bar{a}_{kn}\bar{a}_{ir}R_{kiran}}{(\phi'(u))^n det(a_{kn})(\phi'(u))^n det(a_{ir})|grad(w)|^{n-2}} \\
&= \frac{(det(\nabla^2(w))\phi'(u))^{n-1}\phi'(u))^{n-1}\bar{a}_{kn}\bar{a}_{ir}R_{kiran}}{det(\nabla^2(w))det(\nabla^2(w))|grad(w)|^{n-2}} \\
&= \frac{((\phi'(u))^{2n-2}\bar{a}_{kn}\bar{a}_{ir}R_{kiran})}{det(\nabla^2(w))|grad(w)|^{n-2}} \\
&= \frac{((\phi'(u))^{2n-2}\bar{a}_{kn}\bar{a}_{ir}R_{kiran})}{(\phi'(u))^n det((a_{ij}))(\phi'(u))^{n-2}|grad(u)|^{n-2}} \\
&= \frac{\bar{a}_{kn}\bar{a}_{ir}R_{kiran}}{det((a_{ij}))|grad(u)|^{n-2}}. \tag{103}
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.60 temos, para  $h \rightarrow \infty$ , que

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} -u_{in} \frac{GK}{\kappa_i} |grad(u)|^{n-2}, & \text{para } i < n \text{ e } j = n; \\ u_{in}u_{nj} \frac{GK}{\kappa_i \kappa_j} |grad(u)|^{n-3}, & \text{para } i \neq j \text{ e } i, j < n; \\ (u_{nn} + h|grad(u)|^2) \frac{GK}{\kappa_i} |grad(u)|^{n-2} + \mathcal{O}(1), & \text{para } i = j \text{ e } i, j < n; \\ GK |grad(u)|^{n-1}, & \text{para } i = j = n. \end{cases}$$

Por outro lado, também pelo Lema 3.60, temos que

$$det((a_{ij})) = (u_{nn} + h|grad(u)|^2)GK|grad(u)|^{n-1} + \mathcal{O}(1).$$

Observe que para  $i \neq j$  ou  $i = j = n$  temos que  $\bar{a}_{ij}$  são independentes de  $h$ . Portanto, de (103), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{R(\mathcal{T}^w(grad(w)), E_i, \mathcal{T}^w(E_i), grad(w))}{|grad(w)|^n det(\nabla^2(w))} &= \frac{\bar{a}_{kn}\bar{a}_{ir}R_{kiran}}{det((a_{ij}))|grad(u)|^{n-2}} \\
&= \frac{\bar{a}_{kn}\bar{a}_{rr}R_{krrn}}{det((a_{ij}))|grad(u)|^{n-2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right) \\
&= \frac{\left(-u_{kn} \frac{GK}{\kappa_k} |grad(u)|^{n-2}\right) \left(\frac{det((a_{ij}))}{\kappa_r |grad(u)|}\right) R_{krrn}}{det((a_{ij}))|grad(u)|^{n-2}} \\
&\quad + \frac{\left(GK |grad(u)|^{n-1}\right) \left(\frac{det((a_{ij}))}{\kappa_r |grad(u)|}\right) R_{nrrn}}{det((a_{ij}))|grad(u)|^{n-2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right) \\
&= -\frac{u_{kn}GKR_{krrn}}{|grad(u)|\kappa_k \kappa_r} + \frac{GKR_{nrrn}}{\kappa_r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right)
\end{aligned}$$

$$= -R_{rnrrn} \frac{GK}{\kappa_r} + R_{rkrrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right),$$

onde  $k < n - 1$ . Então pela fórmula de coarea aplicada ao lado direito de (101) nos dá que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus D} \frac{R(\mathcal{T}^w(grad(w)), E_i, \mathcal{T}^w(E_i), grad(w))}{|grad(w)|^n \det(\nabla^2(w))} d\mu = \\ &= \int_{\Omega \setminus D} \left( -R_{rnrrn} \frac{GK}{\kappa_r} + R_{rkrrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right) \right) d\mu \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \int_{\{p \in M : w(p) = s\}} \left( -R_{rnrrn} \frac{GK}{\kappa_r} + R_{rkrrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right) \right) \frac{d\sigma}{|grad(w)|} ds, \end{aligned}$$

onde  $s_i = \phi(t_i)$ ,  $i = 1, 2$ , e  $D = \{p \in M : w(p) < s_1\}$  e  $\Omega = \{p \in M : w(p) < s_2\}$ . Fazendo a mudança de variável  $s = \phi(t)$  e fazendo  $h \rightarrow \infty$  temos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus D} \frac{R(\mathcal{T}^w(grad(w)), E_i, \mathcal{T}^w(E_i), grad(w))}{|grad(w)|^n \det(\nabla^2(w))} d\mu = \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \int_{\{p \in M : w(p) = s\}} \left( -R_{rnrrn} \frac{GK}{\kappa_r} + R_{rkrrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right) \right) \frac{d\sigma}{|grad(w)|} ds \\ &= \int_{\phi(t_1)}^{\phi(t_2)} \int_{\{p \in M : w(p) = \phi(t)\}} \left( -R_{rnrrn} \frac{GK}{\kappa_r} + R_{rkrrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right) \right) \frac{d\sigma}{|grad(w)|} d\phi(t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\{p \in M : u(p) = t\}} \left( -R_{rnrrn} \frac{GK}{\kappa_r} + R_{rkrrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right) \right) \frac{d\sigma}{\phi'(u) |grad(u)|} \phi'(t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\{p \in M : u(p) = t\}} \left( -R_{rnrrn} \frac{GK}{\kappa_r} + R_{rkrrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right) \right) \frac{d\sigma}{\phi'(t) |grad(u)|} \phi'(t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\{p \in M : u(p) = t\}} \left( -R_{rnrrn} \frac{GK}{\kappa_r} + R_{rkrrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{h}\right) \right) \frac{d\sigma}{|grad(u)|} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\{p \in M : u(p) = t\}} \left( -R_{rnrrn} \frac{GK}{\kappa_r} + R_{rkrrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} \right) \frac{d\sigma}{|grad(u)|} dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\{p \in M : u(p) = t\}} R_{rnrrn} \frac{GK}{\kappa_r} \frac{d\sigma}{|grad(u)|} dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\{p \in M : u(p) = t\}} R_{rkrrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} \frac{d\sigma}{|grad(u)|} dt \end{aligned}$$

Usando novamente a fórmula de coarea obtemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus D} \frac{R(\mathcal{T}^w(grad(w)), E_i, \mathcal{T}^w(E_i), grad(w))}{|grad(w)|^n \det(\nabla^2(w))} d\mu = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\{p \in M : u(p) = t\}} R_{rnrrn} \frac{GK}{\kappa_r} \frac{d\sigma}{|grad(u)|} dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\{p \in M : u(p) = t\}} R_{rkrrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} \frac{d\sigma}{|grad(u)|} dt \\ &= - \int_{\Omega \setminus D} R_{rnrrn} \frac{GK}{\kappa_r} d\mu + \int_{\Omega \setminus D} R_{rkrrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} d\mu. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\mathcal{G}(\Gamma) - \mathcal{G}(\gamma) = - \int_{\Omega \setminus D} R_{rnrrn} \frac{GK}{\kappa_r} d\mu + \int_{\Omega \setminus D} R_{rkrrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} d\mu,$$

onde todas as quantidades são calculadas com respeito ao referencial principal de  $u$  e  $k \leq n - 1$ .  $\square$

A Definição 3.63 faz referência ao artigo [GhW76, Definição 1, p. 211].

**Definição 3.63.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que  $u$  é estritamente convexa no sentido de Greene-Wu se para todos  $p \in M$  e toda função  $\phi$  de classe  $C^\infty$  definida em uma vizinhança de  $p$  existe um  $\varepsilon > 0$  tal que  $u - \varepsilon\phi$  é convexa em uma vizinhança de  $p$ .*

**Definição 3.64.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $\Omega \subset M$  um domínio em  $M$ . Considere  $q \in \Omega$  e  $\rho(p) = d(p, q)$ . Definimos*

$$\bar{u}^\varepsilon(p) = u(p) + \frac{\varepsilon}{2}\rho^2(p).$$

Note que se  $u$  é uma função convexa então  $\bar{u}^\varepsilon(p)$  será estritamente convexa no sentido de Greene-Wu, pois  $\bar{u}^\varepsilon(p) - \frac{\varepsilon}{2}\rho^2(p) = u(p)$  é convexa.

Na Definição 3.65 vamos generalizar para variedades Riemannianas o conceito de suavizadores construído para o Lema 2.99.

**Definição 3.65.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de  $M$  e  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suporte em  $[-1, 1]$  de classe  $C^\infty$  tal que  $\phi$  é constante em uma vizinhança da origem e satisfaz  $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(|x|)dx = 1$ . Definimos*

$$(u \circ_\lambda \phi)(p) = \frac{1}{\lambda^n} \int_{v \in T_p M} \phi\left(\frac{|v|}{\lambda}\right) u(\exp_p(v))d\mu_p, \quad (104)$$

onde  $d\mu_p$  é a medida em  $T_p M \simeq \mathbb{R}^n$  induzida pela medida Riemanniana  $d\mu$  de  $M$ . Além disso, definimos também

$$\tilde{u}_\lambda^\varepsilon = \bar{u}^\varepsilon \circ_\lambda \phi.$$

**Proposição 3.66.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de  $M$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $X \subset M$  um subconjunto compacto de  $M$ . Então existe  $\lambda > 0$  tal que  $\tilde{u}_\lambda^\varepsilon$  é de classe  $C^\infty$  em uma vizinhança aberta  $U$  de  $X$  e  $\tilde{u}_\lambda^\varepsilon \rightarrow \bar{u}^\varepsilon$  uniformemente em  $U$ , quando  $\lambda \rightarrow 0$ . Além disso, se  $u$  é de classe  $C^k$  em uma vizinhança aberta  $U$  de  $X$  então  $\tilde{u}_\lambda^\varepsilon \rightarrow \bar{u}^\varepsilon$  em  $U$  com respeito a topologia  $C^k$ . Por fim, se  $u$  é convexa então  $\tilde{u}_\lambda^\varepsilon$  será estritamente convexa no sentido de Greene-Wu com Hessiana positiva definida em todo ponto.*

*Demonstração.* Note que a primeira parte segue do Lema 2.99. Note que se  $u$  é convexa então  $\bar{u}^\varepsilon(p)$  é estritamente convexa no sentido de Greene-Wu e por [GhW76, Teorema 2, p. 214 - 220 e Lema 3.3, p. 215 - 217] temos que  $\tilde{u}_\lambda^\varepsilon$  será estritamente convexa no sentido de Greene-Wu com Hessiana positiva definida em todo ponto.  $\square$

**Definição 3.67.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $A \subset M$  um subconjunto de  $M$  e  $U_\theta(A)$  a vizinhança tubular de raio  $\theta$  de  $A$ . Definimos uma **função de corte para  $U_\theta(A)$**  como uma função contínua  $\eta \geq 0$  em  $M$  a qual depende somente da distância  $\delta(\cdot) = d_A(\cdot)$ , é não decrescente em termos de  $\delta$ , e satisfaz

$$\eta(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } \delta(p) \leq \theta, \\ 1 & \text{se } \delta(p) \geq 2\theta. \end{cases} \quad (105)$$

Pelo Lema 3.3 temos que  $\delta$  é Lipschitz. Assim, podemos escolher  $\eta$  de modo a ser Lipschitz também e, consequentemente, diferenciável em quase todo ponto.

Em todo ponto de diferenciabilidade de  $\eta$  temos que

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{T}^u \left( \frac{\text{grad}(u)}{|\text{grad}(u)|^n} \right), \text{grad}(\eta) \right\rangle &= \frac{\langle (\mathcal{T}_{ij}^u)u_j E_i, \eta_k E_k \rangle}{|\text{grad}(u)|^n} \\ &= \frac{(\mathcal{T}_{ij}^u)u_j \eta_k}{|\text{grad}(u)|^n} \langle E_i, E_k \rangle \\ &= \frac{(\mathcal{T}_{ij}^u)u_j \eta_k}{|\text{grad}(u)|^n} \delta_{ik} \\ &= \frac{(\mathcal{T}_{ij}^u)\eta_i u_j}{|\text{grad}(u)|^n} \\ &= \frac{(\mathcal{T}_{in}^u)\eta_i u_n}{|\text{grad}(u)|^n} \\ &= \frac{(\mathcal{T}_{in}^u)\eta_i (-|\text{grad}(u)|)}{|\text{grad}(u)|^n} \\ &= -\frac{(\mathcal{T}_{in}^u)\eta_i}{|\text{grad}(u)|^{n-1}} \\ &= -\frac{(\mathcal{T}_{kn}^u)\eta_k}{|\text{grad}(u)|^{n-1}} - \frac{(\mathcal{T}_{nn}^u)\eta_n}{|\text{grad}(u)|^{n-1}}, \end{aligned}$$

onde  $k \leq n - 1$ . Pelo Lema 3.60 aplicado às matrizes  $(\mathcal{T}_{kn}^u)$  e  $(\mathcal{T}_{nn}^u)$  obtemos que

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{T}^u \left( \frac{\text{grad}(u)}{|\text{grad}(u)|^n} \right), \text{grad}(\eta) \right\rangle &= -\frac{(\mathcal{T}_{kn}^u)\eta_k}{|\text{grad}(u)|^{n-1}} - \frac{(\mathcal{T}_{nn}^u)\eta_n}{|\text{grad}(u)|^{n-1}} \\ &= -\frac{-u_{kn}\prod_{l \neq k} \kappa_l |\text{grad}(u)|^{n-2} \eta_k}{|\text{grad}(u)|^{n-1}} - \frac{GK |\text{grad}(u)|^{n-1} \eta_n}{|\text{grad}(u)|^{n-1}} \\ &= \frac{u_{nk}\eta_k}{|\text{grad}(u)|} \frac{GK}{\kappa_k} - \eta_n GK. \end{aligned}$$

Além disso, temos que para um campo de vetores  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  arbitrário em  $M$ , uma variedade Riemanniana,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\eta Y) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}(\eta Y), E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle E_i(\eta)Y + \eta \nabla_{E_i}(Y), E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n (\langle E_i(\eta)Y, E_i \rangle + \langle \eta \nabla_{E_i}(Y), E_i \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^n \langle Y, E_i(\eta)E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \eta \nabla_{E_i}(Y), E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle Y, \langle \operatorname{grad}(\eta), E_i \rangle E_i \rangle + \eta \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}(Y), E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle Y, \eta_i E_i \rangle + \eta \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}(Y), E_i \rangle \\
&= \langle Y, \operatorname{grad}(\eta) \rangle + \eta \operatorname{div}(Y).
\end{aligned}$$

Logo, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{div} \left( \eta \mathcal{T}^u \left( \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|^n} \right) \right) d\mu &= \int \left\langle \mathcal{T}^u \left( \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|^n} \right), \operatorname{grad}(\eta) \right\rangle d\mu + \\
&\quad + \int \eta \operatorname{div} \left( \mathcal{T}^u \left( \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|^n} \right) \right) d\mu \\
&= \int \left( \frac{u_{nk}\eta_k}{|\operatorname{grad}(u)|} \frac{GK}{\kappa_k} - \eta_n GK \right) d\mu + \\
&\quad + \int \eta \operatorname{div} \left( \mathcal{T}^u \left( \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|^n} \right) \right) d\mu \tag{106}
\end{aligned}$$

Para o nosso próximo Teorema 3.69 note que nossa nova fórmula de comparação poderá ser aplicada para funções convexas, onde as principais curvaturas podem ser nulas. Assim, vamos definir algumas convenções na Definição 3.68.

**Definição 3.68.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\Gamma$  uma hipersuperfície mergulhada de  $M$ . Considere  $\kappa_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , as curvaturas principais de  $\Gamma$ . Definimos*

$$\frac{GK}{\kappa_r} = \prod_{i \neq r} \kappa_i \quad \text{e} \quad \frac{GK}{\kappa_k \kappa_r} = \prod_{i \neq k, r} \kappa_i.$$

Além disso, definimos

$$\mathcal{G}_\eta(\Gamma) = \int_{\Gamma} \eta GK d\sigma.$$

**Teorema 3.69** (Fórmula de comparação, versão geral). *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $\Gamma \subset M$  um conjunto de nível regular de  $u$  que limita um domínio  $\Omega$  e  $\gamma \subset M$  outro conjunto de nível regular de  $u$  que limita um domínio  $D$  tal que  $D \subset \Omega$ . Suponha que  $\text{grad}(u)$  é o normal para fora ao longo de  $\Gamma$  e  $\gamma$  com respeito aos seus respectivos domínios. Além disso, suponha que  $u$  é de classe  $C^{1,1}$  em  $(\Omega \setminus D) \setminus A$ , para algum conjunto fechado  $A \subset \Omega \setminus D$ , e  $u$  ou é convexa ou  $\nabla^2 e^u$  é não degenerada em quase todo ponto de  $(\Omega \setminus D) \setminus A$ . Seja  $d\mu$  a medida de volume Riemanniano  $n$ -dimensional em  $M$ . Então, para  $\theta > 0$  e  $\eta$  uma função corte para  $U_\theta(A)$ ,*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\eta(\Gamma) - \mathcal{G}_\eta(\gamma) &= \int_{\Omega \setminus D} \left( \eta_k \frac{GK}{\kappa_k} \frac{u_{nk}}{|\text{grad}(u)|} - \eta_n GK \right) d\mu + \\ &+ \int_{\Omega \setminus D} \eta \left( -R_{rnrr} \frac{GK}{\kappa_r} + R_{rkrr} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|\text{grad}(u)|} \right) d\mu, \end{aligned}$$

onde todas as quantidades são calculadas com respeito ao referencial principal de  $u$  e  $k \leq n-1$ .

*Demonstração.* Considere  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  a função de  $M$ ,  $\varepsilon > 0$  arbitrário e  $cl(\Omega) \setminus D$  um subconjunto compacto de  $M$ . Pela Proposição 3.66 temos que existe  $\lambda > 0$  tal que  $\tilde{u}_\lambda^\varepsilon$  é de classe  $C^\infty$  em uma vizinhança aberta  $U$  de  $cl(\Omega) \setminus D$ .

Como  $\Gamma$  e  $\gamma$  são conjuntos de níveis de  $u$  que limitam os domínios  $\Omega$  e  $D$ , respectivamente, tais que  $D \subset \Omega$ . Então temos que  $\Gamma = \{p \in M : u(p) = t_1\}$ ,  $\gamma = \{p \in M : u(p) = t_2\}$ ,  $\Omega = \{p \in M : u(p) \leq t_1\}$  e  $D = \{p \in M : u(p) \leq t_2\}$ , com  $t_2 < t_1$ . Considere  $\Gamma_\lambda^\varepsilon = \{p \in M : \tilde{u}_\lambda^\varepsilon(p) = t_1\}$ ,  $\gamma_\lambda^\varepsilon = \{p \in M : \tilde{u}_\lambda^\varepsilon(p) = t_2\}$ ,  $\Omega_\lambda^\varepsilon = \{p \in M : \tilde{u}_\lambda^\varepsilon(p) \leq t_1\}$  e  $D_\lambda^\varepsilon = \{p \in M : \tilde{u}_\lambda^\varepsilon(p) \leq t_2\}$ .

Agora, por (106) para  $\tilde{u}_\lambda^\varepsilon$  e calculado sobre  $\Omega_\lambda^\varepsilon \setminus D_\lambda^\varepsilon$  obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\lambda^\varepsilon \setminus D_\lambda^\varepsilon} \text{div} \left( \eta \mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon} \left( \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n} \right) \right) d\mu &= \int_{\Omega_\lambda^\varepsilon \setminus D_\lambda^\varepsilon} \left( \eta_k \frac{GK}{\kappa_k} \frac{(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)_{nk}}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|} - \eta_n GK \right) d\mu + \\ &+ \int_{\Omega_\lambda^\varepsilon \setminus D_\lambda^\varepsilon} \eta \text{div} \left( \mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon} \left( \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n} \right) \right) d\mu \quad (107) \end{aligned}$$

Vamos calcular primeiro o lado esquerdo de (107). Pelo Teorema da divergência, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\lambda^\varepsilon \setminus D_\lambda^\varepsilon} \text{div} \left( \eta \mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon} \left( \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n} \right) \right) d\mu &= \int_{\partial(\Omega_\lambda^\varepsilon \setminus D_\lambda^\varepsilon)} \left\langle \eta \mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon} \left( \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n} \right), \nu \right\rangle d\sigma \\ &= \int_{\Gamma_\lambda^\varepsilon \cup \gamma_\lambda^\varepsilon} \left\langle \eta \mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon} \left( \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n} \right), \nu \right\rangle d\sigma, \end{aligned}$$

onde  $\nu$  é o normal para fora de  $\partial(\Omega_\lambda^\varepsilon \setminus D_\lambda^\varepsilon) = \Gamma_\lambda^\varepsilon \cup \gamma_\lambda^\varepsilon$ . Note que  $\nu = \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|}$  em  $\Gamma_\lambda^\varepsilon$  e  $\nu = -\frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|}$  em  $\gamma_\lambda^\varepsilon$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\lambda^\varepsilon \setminus D_\lambda^\varepsilon} \text{div} \left( \eta \mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon} \left( \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n} \right) \right) d\mu &= \int_{\Gamma_\lambda^\varepsilon \cup \gamma_\lambda^\varepsilon} \left\langle \eta \mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon} \left( \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n} \right), \nu \right\rangle d\sigma \\ &= \int_{\Gamma_\lambda^\varepsilon} \left\langle \eta \mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon} \left( \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n} \right), \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|} \right\rangle d\sigma + \\ &\quad + \int_{\gamma_\lambda^\varepsilon} \left\langle \eta \mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon} \left( \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n} \right), -\frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|} \right\rangle d\sigma \\ &= \int_{\Gamma_\lambda^\varepsilon} \eta \left\langle \mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon} \left( \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n} \right), \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|} \right\rangle d\sigma - \\ &\quad - \int_{\gamma_\lambda^\varepsilon} \eta \left\langle \mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon} \left( \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n} \right), \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|} \right\rangle d\sigma \end{aligned}$$

Procedendo analogamente à demonstração do Lema 3.56 obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\lambda^\varepsilon \setminus D_\lambda^\varepsilon} \text{div} \left( \eta \mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon} \left( \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n} \right) \right) d\mu &= \int_{\Gamma_\lambda^\varepsilon} \eta \left\langle \mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon} \left( \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n} \right), \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|} \right\rangle d\sigma - \\ &\quad - \int_{\gamma_\lambda^\varepsilon} \eta \left\langle \mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon} \left( \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n} \right), \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|} \right\rangle d\sigma \\ &= \int_{\Gamma_\lambda^\varepsilon} \eta GK(p) d\sigma - \int_{\gamma_\lambda^\varepsilon} \eta DK(q) d\sigma \\ &= \mathcal{G}_\eta(\Gamma_\lambda^\varepsilon) - \mathcal{G}_\eta(\gamma_\lambda^\varepsilon). \end{aligned} \tag{108}$$

Agora, vamos calcular a segunda integral do lado direito de (107). Pelo Lema 3.52 temos que

$$\int_{\Omega_\lambda^\varepsilon \setminus D_\lambda^\varepsilon} \eta \text{div} \left( \mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon} \left( \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n} \right) \right) d\mu = \int_{\Omega_\lambda^\varepsilon \setminus D_\lambda^\varepsilon} \eta \left( \left\langle \text{div}(\mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon}), \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n} \right\rangle \right) d\mu.$$

Agora, pelo Lema 3.58, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\lambda^\varepsilon \setminus D_\lambda^\varepsilon} \eta \text{div} \left( \mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon} \left( \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n} \right) \right) d\mu &= \int_{\Omega_\lambda^\varepsilon \setminus D_\lambda^\varepsilon} \eta \left( \left\langle \text{div}(\mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon}), \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n} \right\rangle \right) d\mu \\ &= \int_{\Omega_\lambda^\varepsilon \setminus D_\lambda^\varepsilon} \eta \left( \frac{R(\mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon}(\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)), E_i, \mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon}(E_i), \text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon))}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n \det(\nabla^2(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon))} \right) d\mu. \end{aligned}$$

Procedendo analogamente à demonstração do Teorema 3.62 obtemos que

$$\int_{\Omega_\lambda^\varepsilon \setminus D_\lambda^\varepsilon} \eta \text{div} \left( \mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon} \left( \frac{\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n} \right) \right) d\mu = \int_{\Omega_\lambda^\varepsilon \setminus D_\lambda^\varepsilon} \eta \left( \frac{R(\mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon}(\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)), E_i, \mathcal{T}^{\tilde{u}_\lambda^\varepsilon}(E_i), \text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon))}{|\text{grad}(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|^n \det(\nabla^2(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon))} \right) d\mu$$

$$= \int_{\Omega_\lambda^\varepsilon \setminus D_\lambda^\varepsilon} \eta \left( -R_{rnrrn} \frac{GK}{\kappa_r} + R_{rkrrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)_{nk}}{|grad(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|} \right) d\mu, \quad (109)$$

onde todas as quantidades são calculadas com respeito ao referencial principal de  $\tilde{u}_\lambda^\varepsilon$  e  $k \leq n - 1$ . Portanto, usando os resultados de (108) e (109) em (107) temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\eta(\Gamma_\lambda^\varepsilon) - \mathcal{G}_\eta(\gamma_\lambda^\varepsilon) &= \int_{\Omega_\lambda^\varepsilon \setminus D_\lambda^\varepsilon} \left( \eta_k \frac{GK}{\kappa_k} \frac{(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)_{nk}}{|grad(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|} - \eta_n GK \right) d\mu + \\ &\quad + \int_{\Omega_\lambda^\varepsilon \setminus D_\lambda^\varepsilon} \eta \left( -R_{rnrrn} \frac{GK}{\kappa_r} + R_{rkrrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)_{nk}}{|grad(\tilde{u}_\lambda^\varepsilon)|} \right) d\mu. \end{aligned} \quad (110)$$

Agora, fazendo  $\lambda \rightarrow 0$  obtemos, pela Proposição 3.66 que  $\tilde{u}_\lambda^\varepsilon \rightarrow \bar{u}^\varepsilon$  uniformemente em  $U$ . Além disso, como  $u$  é de classe  $C^{1,1}$  em uma vizinhança aberta  $U$  de  $(\Omega \setminus D) \setminus A$  então  $\tilde{u}_\lambda^\varepsilon \rightarrow \bar{u}^\varepsilon$  em  $U$  com respeito a topologia  $C^{1,1}$ . Além disso, quando fazemos  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtemos que  $\bar{u}^\varepsilon \rightarrow u$ , pois  $\bar{u}^\varepsilon = u + \frac{\varepsilon}{2}\rho^2$ . Disso, segue-se que  $\Gamma_\lambda^\varepsilon \rightarrow \Gamma$ ,  $\gamma_\lambda^\varepsilon \rightarrow \gamma$ ,  $\Omega_\lambda^\varepsilon \rightarrow \Omega$  e  $D_\lambda^\varepsilon \rightarrow D$  quando  $\lambda \rightarrow 0$  e  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Portanto, de (110), temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\eta(\Gamma) - \mathcal{G}_\eta(\gamma) &= \int_{\Omega \setminus D} \left( \eta_k \frac{GK}{\kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} - \eta_n GK \right) d\mu + \\ &\quad + \int_{\Omega \setminus D} \eta \left( -R_{rnrrn} \frac{GK}{\kappa_r} + R_{rkrrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} \right) d\mu, \end{aligned}$$

onde todas as quantidades são calculadas com respeito ao referencial principal de  $u$  e  $k \leq n - 1$ .  $\square$

### 3.4 APLICAÇÕES PARA A FÓRMULA DE COMPARAÇÃO

Nesta seção vamos estabelecer algumas aplicações para a fórmula de comparação obtida no Teorema 3.69, como para variedades com curvatura seccional constante, tomando-se conjuntos de níveis regulares para a função distância com sinal, ou tomando-se a hipersuperfície como uma esfera geodésica. Comecemos com algumas definições.

**Definição 3.70.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de  $M$  e  $p \in M$  um ponto de  $M$  onde  $u$  é duas vezes diferenciável. Considere o conjunto de nível regular  $\Gamma = \{q \in M : u(q) = u(p)\}$  e  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$  as curvaturas principais de  $\Gamma$ . Seja  $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1})$ . Definimos a **r-ésima curvatura média generalizada de  $\Gamma$  por***

$$\sigma_r(\kappa) = \sigma_r(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}),$$

onde  $\sigma_r$  denota as funções simétricas elementares, isto é,  $\sigma_r(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i_1 < \dots < i_r} x_{i_1} \dots x_{i_r}$ .

**Observação 3.71.** Nas condições da Definição 3.70 temos que  $\sigma_{n-1}(\kappa) = GK$  e  $\sigma_1(\kappa) = (n-1)H$ , onde  $H$  é a curvatura média de  $\Gamma$ .

Note que  $\text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) = n\omega_n$ , onde  $\omega_n = \text{vol}(\mathbb{B}^n) = \frac{\pi^{n/2}}{G\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$  e  $G$  é a função gama.

**Lema 3.72.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional e  $B_r$  uma bola geodésica de raio  $r$ , suficientemente pequeno, em  $M$ . Então*

$$|\mathcal{G}(\partial B_r) - n\omega_n| \leq Cr^2,$$

para alguma constante  $C$  independente de  $r$ .

*Demonstração.* Para  $\partial B_r$ , uma esfera geodésica, considere  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$  as curvaturas principais de  $\partial B_r$ . Por [CV81, Teorema 3.1, p. 36] temos, em particular, que

$$GK = \prod_{k=1}^{n-1} \kappa_i(p) = \prod_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{r} \delta_{ii} + \mathcal{O}(r) \right) = \frac{1}{r^{n-1}} + \mathcal{O}(r^{n-1}),$$

onde  $GK$  é a curvatura de Gauss-Kronecker de  $\partial B_r$ . Além disso, temos por [CV81, Teorema 3.5, p. 37] que para  $r$  suficientemente pequeno  $GK \geq 0$ . Portanto

$$0 \leq GK \leq \frac{1}{r^{n-1}}. \tag{111}$$

Além disso, por [Gra74, Teorema 3.1, p. 337 - 338] temos que

$$\text{vol}(\partial B_r) = \alpha_n r^{n-1} - \text{Ric}(\partial B_r) \frac{\alpha_n}{6n} r^{n+1} + \mathcal{O}(r^{n+3}),$$

onde  $\alpha_n = 3G \left(\frac{1}{2}\right)^n G \left(\frac{n}{2}\right)^{-1}$ ,  $G$  é a função gama e  $\text{Ric}(\partial B_r)$  é a curvatura de Ricci de  $\partial B_r$ . Primeiramente, note que,  $\alpha_n = \frac{2\pi^{n/2}}{G \left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{n\pi^{n/2}}{G \left(\frac{n}{2} + 1\right)} = n\omega_n$ . Portanto, temos que

$$\text{vol}(\partial B_r) - n\omega_n r^{n-1} \leq Cr^{n+1} \quad (112)$$

onde  $C = -\text{Ric}(\partial B_r) \frac{n\omega_n}{6n}$  é uma constante independente de  $r$ . Usando (111) e (112) obtemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\partial B_r) - n\omega_n &= \int_{\partial B_r} GKd\sigma - n\omega_n \\ &\leq \int_{\partial B_r} \frac{1}{r^{n-1}} d\sigma - n\omega_n \\ &\leq \frac{1}{r^{n-1}} \text{vol}(\partial B_r) - n\omega_n \\ &\leq \frac{1}{r^{n-1}} (Cr^{n+1} + n\omega_n r^{n-1}) - n\omega_n \\ &\leq Cr^2 + n\omega_n - n\omega_n \\ &\leq Cr^2. \end{aligned} \quad (113)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\partial B_r) - n\omega_n &= \int_{\partial B_r} GKd\sigma - n\omega_n \\ &\geq -n\omega_n \\ &\geq -C \frac{r^{n+1}}{1 - r^{n-1}} \\ &\geq -Cr^2 \frac{1}{1 - r^{n-1}} - C \frac{r^{n-1}}{1 - r^{n-1}}. \end{aligned}$$

Assim, quando  $r$  é suficientemente pequeno temos que  $\frac{1}{1 - r^{n-1}} \rightarrow 1$  e  $\frac{r^{n-1}}{1 - r^{n-1}} \rightarrow 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\partial B_r) - n\omega_n &\geq -Cr^2 \frac{1}{1 - r^{n-1}} - C \frac{r^{n-1}}{1 - r^{n-1}} \\ &\geq -Cr^2. \end{aligned} \quad (114)$$

Por (113) e (114) temos que

$$|\mathcal{G}(\partial B_r) - n\omega_n| \leq Cr^2.$$

□

Faremos primeiramente a aplicação para o caso de uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante.

**Corolário 3.73.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante igual a  $K_0$ ,  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $\Gamma \subset M$  um conjunto de nível regular de  $u$  que limita um domínio  $\Omega$  e  $\gamma \subset M$  outro conjunto de nível regular de  $u$  que limita um domínio  $D$  tal que  $D \subset \Omega$ . Suponha que  $\text{grad}(u)$  é o normal para fora ao longo de  $\Gamma$  e  $\gamma$  com respeito aos seus respectivos domínios. Além disso, suponha que  $u$  é de classe  $C^{1,1}$  em  $\Omega \setminus D$  e  $u$  ou é convexa ou  $\nabla^2 e^u$  é não degenerada em quase todo ponto de  $\Omega \setminus D$ . Seja  $d\mu$  a medida de volume Riemanniano  $n$ -dimensional em  $M$ . Então,*

$$\mathcal{G}(\Gamma) - \mathcal{G}(\gamma) = -K_0 \int_{\Omega \setminus D} \sigma_{n-2}(\kappa) d\mu. \quad (115)$$

Em particular, se  $\Gamma$  e  $\gamma$  são convexos e  $K_0 \leq 0$  então  $\mathcal{G}(\Gamma) \geq \mathcal{G}(\gamma)$ . Além disso, se  $\Gamma$  é convexo e  $K_0 \leq 0$  então

$$\mathcal{G}(\Gamma) \geq n\omega_n - K_0 \int_{\Omega} \sigma_{n-2}(\kappa) d\mu \geq n\omega_n. \quad (116)$$

*Demonstração.* Primeiramente, como  $M$  tem curvatura seccional constante  $K_0$ , pela Proposição 2.51 temos que  $R_{ijkl} = K_0 (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$ . Portanto, pelo Teorema 3.69 e usando que a função de corte  $\eta$  é constante e igual a 1, pois  $A = \emptyset$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\Gamma) - \mathcal{G}(\gamma) &= \int_{\Omega \setminus D} -R_{rnnr} \frac{GK}{\kappa_r} + R_{rknn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|\text{grad}(u)|} d\mu \\ &= \int_{\Omega \setminus D} -K_0 (\delta_{rr}\delta_{nn} - \delta_{rn}\delta_{nr}) \frac{GK}{\kappa_r} + K_0 (\delta_{rr}\delta_{kn} - \delta_{rn}\delta_{kn}) \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|\text{grad}(u)|} d\mu. \end{aligned}$$

Como  $r, k \leq n-1$  temos que  $\delta_{rn} = \delta_{kn} = 0$  e portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\Gamma) - \mathcal{G}(\gamma) &= \int_{\Omega \setminus D} -K_0 (\delta_{rr}\delta_{nn} - \delta_{rn}\delta_{nr}) \frac{GK}{\kappa_r} + K_0 (\delta_{rr}\delta_{kn} - \delta_{rn}\delta_{kn}) \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|\text{grad}(u)|} d\mu \\ &= \int_{\Omega \setminus D} -K_0 \delta_{rr} \frac{GK}{\kappa_r} d\mu \\ &= -K_0 \int_{\Omega \setminus D} \sum_{r=1}^{n-1} (\Pi_{l \neq r} \kappa_l) d\mu \\ &= -K_0 \int_{\Omega \setminus D} \sigma_{n-2}(\kappa) d\mu. \end{aligned}$$

Suponha agora que  $\Gamma$  e  $\gamma$  são convexos e  $K_0 \leq 0$ . Por [Boro2, Lema 1, p. 851] temos que os conjuntos de níveis  $\{p \in M : u(p) \leq b\}$ ,  $t_1 \leq b \leq t_2$ , onde  $\Gamma = \{p \in M : u(p) = t_2\}$  e  $\gamma = \{p \in M : u(p) = t_1\}$ , são convexos. Portanto, como esses conjuntos de níveis são convexos, todas as curvaturas principais são positivas, pois a hessiana de  $u$  é positiva semi-definida. Donde temos que  $\sigma_{n-2}(\kappa) \geq 0$ . Logo, temos que

$$\mathcal{G}(\Gamma) - \mathcal{G}(\gamma) = -K_0 \int_{\Omega \setminus D} \sigma_{n-2}(\kappa) d\mu \geq 0.$$

Ou ainda,  $\mathcal{G}(\Gamma) \geq \mathcal{G}(\gamma)$ .

Por fim, considere  $\gamma$  uma sequência de esferas geodésicas com raio convergindo para 0,  $\Gamma$  convexa e  $K_0 \leq 0$ . Pelo Lema 3.72 quando  $r \rightarrow 0$  temos que

$$0 \leftarrow -Cr^2 \leq \mathcal{G}(\gamma) - n\omega_n.$$

Isto é,

$$\mathcal{G}(\gamma) \geq n\omega_n.$$

Logo, como  $\Gamma$  é convexo, por [Boro2, Lema 1, p. 851], temos que os conjuntos de níveis  $\{p \in M : u(p) \leq b\}$ ,  $b \leq t_2$ , onde  $\Gamma = \{p \in M : u(p) = t_2\}$ , são convexos. Portanto, como esses conjuntos de níveis são convexos, todas as principais curvaturas são positivas, pois a hessiana de  $u$  é positiva semi-definida. Donde temos que  $\sigma_{n-2}(\kappa) \geq 0$ . Além disso, por (115) e como  $K_0 \leq 0$  temos que

$$\mathcal{G}(\Gamma) \geq n\omega_n - K_0 \int_{\Omega} \sigma_{n-2}(\kappa) d\mu \geq n\omega_n.$$

□

Agora faremos o caso no qual tomamos o conjunto de nível regular da função distância com sinal.

**Corolário 3.74.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Cartan-Hadamard,  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada em  $M$  convexa e de classe  $C^{1,1}$  tal que  $\Gamma$  limita um domínio  $\Omega$ , isto é,  $\partial\Omega = \Gamma$ . Seja  $u = d_{\Gamma}^*$  e  $\gamma \subset M$  um conjunto de nível regular convexo de  $u$  que limita um domínio  $D$  tal que  $D \subset \Omega$  e  $\Omega \setminus D \subset U_r(\Gamma)$ , com  $r = \text{reach}(\Gamma)$ . Seja  $d\mu$  a medida de volume Riemanniano  $n$ -dimensional em  $M$ . Então,*

$$\mathcal{G}(\Gamma) - \mathcal{G}(\gamma) = - \int_{\Omega \setminus D} R_{rnrn} \frac{GK}{\kappa_r} d\mu. \quad (117)$$

Em particular, se  $K_M \leq -a \leq 0$  então

$$\mathcal{G}(\Gamma) \geq \mathcal{G}(\gamma) + a \int_{\Omega \setminus D} \sigma_{n-2}(\kappa) d\mu. \quad (118)$$

Por fim, se  $\Gamma$  é uma esfera geodésica e  $K_M \leq 0$  então  $\mathcal{G}(\Gamma) \geq n\omega_n$ .

*Demonstração.* Note que pelo Lema 3.6 item (2) temos que  $grad(u)$  é o normal para fora ao longo de  $\Gamma$  e  $\gamma$  com respeito aos seus respectivos domínios. Além disso, pela Proposição 3.25 temos que  $u$  é de classe  $C^{1,1}$  em  $U_r(\Gamma)$ , em particular,  $u$  é de classe  $C^{1,1}$  em  $\Omega \setminus D$ , pois  $\Omega \setminus D \subset U_r(\Gamma)$  por hipótese.

Além disso, assuma que  $\gamma = (d_\Gamma^*)^{-1}(-\varepsilon)$ , com  $0 < \varepsilon < r$ , como  $\gamma$  é convexo temos, pelo Lema 3.34, que  $d_D$  é convexa em  $M$ . Assim, como  $d_\Gamma^* = d_\gamma^* + \varepsilon$  temos que  $d_\Gamma^*$  é convexa em  $\Omega \setminus D$ . De fato, considere  $p_1, p_2 \in \Omega \setminus D$  e  $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow M$  a geodésica tal que  $\gamma(t_1) = p_1$ ,  $\gamma(t_2) = p_2$  e  $\gamma([t_1, t_2]) \subset \Omega \setminus D$ . Tome  $p \in \gamma([t_1, t_2])$  arbitrário tal que  $\gamma((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2) = p$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Logo, como  $d_D$  é convexa,

$$\begin{aligned} d_\Gamma^* \circ \gamma((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2) &= d_\Gamma^*(p) = d_\gamma^*(p) + \varepsilon = (d_D \circ \gamma((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2)) + \varepsilon \\ &\leq ((1 - \lambda)d_D \circ \gamma(t_1) + \lambda d_D \circ \gamma(t_2)) + \varepsilon \\ &= ((1 - \lambda)d_D(p_1) + \lambda d_D(p_2)) + \varepsilon \\ &= ((1 - \lambda)(d_\Gamma^*(p_1) - \varepsilon) + \lambda(d_\Gamma^*(p_2) - \varepsilon)) + \varepsilon \\ &= ((1 - \lambda)d_\Gamma^*(p_1) + \lambda d_\Gamma^*(p_2)) - \varepsilon + \lambda \varepsilon - \lambda \varepsilon + \varepsilon \\ &= (1 - \lambda)d_\Gamma^*(p_1) + \lambda d_\Gamma^*(p_2) \\ &= (1 - \lambda)d_\Gamma^* \circ \gamma(t_1) + \lambda d_\Gamma^* \circ \gamma(t_2). \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.12 temos que  $|grad(u)|$  é constante nos conjuntos de nível de  $u$ , donde temos que  $u_{kn} = Hess(u)(E_k, E_n) = \langle \nabla_{E_k} grad(u), E_n \rangle = 0$ . Portanto, pelo Teorema 3.69 e usando que a função de corte  $\eta$  é constante e igual a 1, pois  $A = \emptyset$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\Gamma) - \mathcal{G}(\gamma) &= \int_{\Omega \setminus D} -R_{rnrn} \frac{GK}{\kappa_r} + R_{rkrn} \frac{GK}{\kappa_r \kappa_k} \frac{u_{nk}}{|grad(u)|} d\mu \\ &= - \int_{\Omega \setminus D} R_{rnrn} \frac{GK}{\kappa_r} d\mu \end{aligned}$$

Suponha que  $K_M \leq -a \leq 0$ . Daí para  $i \neq j$  temos que

$$\begin{aligned} -a &\geq K_M = K(E_i, E_j) \\ &= \frac{(E_i, E_j, E_j, E_i)}{|E_i|^2 |E_j|^2 - \langle E_i, E_j \rangle^2} \\ &= R_{ijij}. \end{aligned}$$

Isto é, para  $i \neq j$ ,  $-R_{ijij} \geq a$ . Portanto, por (117) temos que

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \mathcal{G}(\gamma) + \int_{\Omega \setminus D} -R_{rnrn} \frac{GK}{\kappa_r} d\mu$$

$$\begin{aligned} &\geq \mathcal{G}(\gamma) + \int_{\Omega \setminus D} a \sum_{r=1}^{n-1} (\Pi_{l \neq r} \kappa_l) d\mu \\ &= \mathcal{G}(\gamma) + a \int_{\Omega \setminus D} \sigma_{n-2}(\kappa) d\mu \end{aligned}$$

Por fim, se  $\Gamma$  é uma esfera geodésica e  $K_M \leq 0$  temos que  $\gamma$  é uma esfera geodésica também, pois são hipersuperfícies paralelas. Fazendo o raio de  $\gamma$  tender para 0 temos, pelo Lema 3.72, que  $\mathcal{G}(\gamma) \geq n\omega_n$ . Além disso, como  $d_D$  é convexa em  $M$  e para  $p \notin D$  temos que  $d_\gamma^* = d_D$  então as hipersuperfícies paralelas exteriores de  $\gamma$  são convexas; assim, todas as curvaturas principais são positivas, pois a hessiana de  $d_D$  é positiva semi-definida. Donde temos que  $\sigma_{n-2}(\kappa) \geq 0$ . Logo, por (118) temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\Gamma) &\geq \mathcal{G}(\gamma) + a \int_{\Omega \setminus D} \sigma_{n-2}(\kappa) d\mu \\ &\geq n\omega_n + a \int_{\Omega \setminus D} \sigma_{n-2}(\kappa) d\mu \\ &\geq n\omega_n. \end{aligned}$$

□

**Lema 3.75.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $U \subset M$  um subconjunto aberto de  $M$  que é estrelado com respeito a um ponto  $p \in U$ . Suponha que a curvatura de  $U$  é constante com relação a todos os planos que são tangentes às geodésicas que partem de  $p$ . Então a curvatura de  $U$  é constante.*

*Demonação.* Seja  $K_0$  o valor da curvatura de  $U$ , onde a curvatura de  $U$  é constante. Considere  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa, com curvatura constante  $K_0$  e da mesma dimensão de  $M$ . Seja  $\tilde{p} \in \tilde{M}$  e  $i : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$  uma isometria. Defina  $f : U \rightarrow \tilde{M}$  por  $f(q) = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ (\exp_p)^{-1}(q)$ . Pelo Teorema 2.92 temos que  $f$  é uma isometria local, o que prova o requerido. □

A nossa última aplicação será quando para uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante não-positiva e a hipersuperfície é uma esfera geodésica. Note que esta aplicação é resultado das duas últimas aplicação, pois podemos ver uma esfera geodésica como um conjunto de nível da função distância.

**Corolário 3.76.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional,  $B_\rho$  uma bola geodésica em  $M$  e suponha que  $K_M \leq -a \leq 0$ . Então*

$$\mathcal{G}(\partial B_\rho) \geq n\omega_n + a \int_{B_\rho} \sigma_{n-2}(\kappa) d\mu \geq \mathcal{G}(\partial B_\rho^a), \quad (119)$$

onde  $B_\rho^a$  é uma bola geodésica de raio  $\rho$  no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n(-a)$ . Se temos a igualdade em qualquer uma das duas desigualdades de (119) então  $B_\rho$  é isométrica a  $B_\rho^a$ .

*Demonastração.* Seja  $B_r$  uma bola geodésica de raio  $r < \rho$  com o mesmo centro que  $B_\rho$ . Como  $\partial B_\rho$  é uma esfera geodésica temos que ela é de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , em particular  $\mathcal{C}^{1,1}$ , e também é  $h$ -convexa, donde temos que  $\partial B_\rho$  é  $d$ -convexa pelo Lema 3.41. Portanto, pelo Corolário 3.74 em (118) temos que

$$\mathcal{G}(\partial B_\rho) \geq \mathcal{G}(\partial B_r) + a \int_{B_\rho \setminus B_r} \sigma_{n-2}(\kappa) d\mu.$$

Fazendo  $r \rightarrow 0$ , pelo Lema 3.72, que

$$\mathcal{G}(\partial B_\rho) \geq n\omega_n + a \int_{B_\rho} \sigma_{n-2}(\kappa) d\mu.$$

Assumindo que ocorre a igualdade nas inequações acima, pela Corolário 3.74 em (117) que

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho \setminus B_r} a\sigma_{n-2}(\kappa) d\mu &= \mathcal{G}(\partial B_\rho) - \mathcal{G}(\partial B_r) \\ &= - \int_{B_\rho \setminus B_r} R_{rnrn} \frac{GK}{\kappa_r} d\mu \\ &= \int_{B_\rho \setminus B_r} \sum_{r=1}^{n-1} -R_{rnrn} \Pi_{l \neq r} \kappa_l d\mu. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} a\sigma_{n-2}(\kappa) &= \sum_{r=1}^{n-1} -R_{rnrn} \Pi_{l \neq r} \kappa_l \\ \sum_{r=1}^{n-1} a\Pi_{l \neq r} \kappa_l &= \sum_{r=1}^{n-1} -R_{rnrn} \Pi_{l \neq r} \kappa_l \end{aligned}$$

Isto é,  $R_{rnrn} = -a$ . Então, como  $B_\rho$  é estrelado, pelo Lema 3.75 temos que  $B_\rho$  tem curvatura constante igual a  $-a$ , portanto  $B_\rho$  é isométrica a  $B_\rho^a$ .

Note que as curvaturas principais de  $\partial B_r$  são limitadas por cima por  $\sqrt{a} \coth(\sqrt{a}r)$  por [Che89, Proposição 1.7.3, p. 184]. Consequentemente, em  $\partial B_r$ ,

$$\sigma_{n-2}(\kappa) = \sum_{k=1}^{n-1} (\Pi_{l \neq k} \kappa_l) \geq \sum_{k=1}^{n-1} (\Pi_{l \neq k} \sqrt{a} \coth(\sqrt{a}r)) = (n-1) (\sqrt{a} \coth(\sqrt{a}r))^{n-2}. \quad (120)$$

Considere  $A(r, \theta) d\theta$  o elemento de volume (área superficial) de  $\partial B_r$  e  $H(r, \theta)$  a função curvatura média de  $\partial B_r$  em coordenadas esféricas (geradas pela aplicação exponencial no centro de  $B_r$ ). Por [Che89, Proposição 1.5.4, p. 181], temos que

$$\frac{d}{dr} A(r, \theta) = (n-1) H(r, \theta) A(r, \theta) \geq (n-1) \sqrt{a} \coth(\sqrt{a}r) A(r, \theta).$$

Desenvolvendo a inequação acima para  $r_0 < r$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dr} A(r, \theta) &\geq (n-1)\sqrt{a} \coth(\sqrt{a}r) A(r, \theta) \\
 \frac{d}{dr} \frac{A(r, \theta)}{A(r_0, \theta)} &\geq (n-1)\sqrt{a} \coth(\sqrt{a}r) \\
 \int_{r_0}^r \frac{d}{dt} \frac{A(t, \theta)}{A(t_0, \theta)} dt &\geq \int_{r_0}^r (n-1)\sqrt{a} \coth(\sqrt{a}t) dt \\
 \ln(A(r, \theta)) - \ln(A(r_0, \theta)) &\geq \left( \ln \left( \left( \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{a}r)}{\sqrt{a}} \right)^{n-1} \right) \right)_{r_0}^r \\
 \ln(A(r, \theta)) - \ln(A(r_0, \theta)) &\geq \ln \left( \left( \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{a}r)}{\sqrt{a}} \right)^{n-1} \right) - \ln \left( \left( \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{a}r_0)}{\sqrt{a}} \right)^{n-1} \right) \\
 \ln \left( \frac{A(r, \theta)}{A(r_0, \theta)} \right) &\geq \ln \left( \left( \frac{\frac{\operatorname{senh}(\sqrt{a}r)}{\sqrt{a}}}{\frac{\operatorname{senh}(\sqrt{a}r_0)}{\sqrt{a}}} \right)^{n-1} \right) \\
 \frac{A(r, \theta)}{A(r_0, \theta)} &\geq \frac{\left( \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{a}r)}{\sqrt{a}} \right)^{n-1}}{\left( \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{a}r_0)}{\sqrt{a}} \right)^{n-1}} \\
 A(r, \theta) &\geq \frac{A(r_0, \theta)}{\left( \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{a}r_0)}{\sqrt{a}} \right)^{n-1}} \left( \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{a}r)}{\sqrt{a}} \right)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Fazendo-se  $r_0 \rightarrow 0$  obtemos que

$$A(r, \theta) \geq \left( \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{a}r)}{\sqrt{a}} \right)^{n-1}. \quad (121)$$

Consequentemente, de (120) e (121), temos que

$$\begin{aligned}
 n\omega_n + a \int_{B_\rho} \sigma_{n-2}(\kappa) d\mu &= n\omega_n + a \int_0^\rho \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sigma_{n-2}(\kappa) A(r, \theta) d\theta dr \\
 &\geq n\omega_n + a \int_0^\rho \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (n-1) (\sqrt{a} \coth(\sqrt{a}r))^{n-2} \left( \frac{\operatorname{sinh}(\sqrt{a}r)}{\sqrt{a}} \right)^{n-1} d\theta dr
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n\omega_n + \int_{S^{n-1}} d\theta \int_0^\rho a(n-1) (\sqrt{a} \coth(\sqrt{a}r))^{n-2} \left( \frac{\sinh(\sqrt{a}r)}{\sqrt{a}} \right)^{n-1} dr \\
&= n\omega_n + n\omega_n \int_0^\rho \sqrt{a}(n-1) (\cosh(\sqrt{a}r))^{n-2} \sinh(\sqrt{a}r) dr \\
&= n\omega_n + n\omega_n \left( (\cosh(\sqrt{a}r))^{n-1} \right)_0^\rho \\
&= n\omega_n + n\omega_n (\cosh(\sqrt{a}\rho))^{n-1} - n\omega_n (\cosh(\sqrt{a}0))^{n-1} \\
&= n\omega_n + n\omega_n (\cosh(\sqrt{a}\rho))^{n-1} - n\omega_n \\
&= n\omega_n (\cosh(\sqrt{a}\rho))^{n-1} \\
&= \mathcal{G}(\partial B_\rho^a).
\end{aligned}$$

Donde temos o desejado. Assumindo que ocorre a igualdade na inequação acima, então vale a igualdade na primeira inequação de (119) e, pelo mesmo argumento dado anteriormente, temos que  $B_\rho$  é isométrica a  $B_\rho^a$ .  $\square$

### 3.5 CURVATURA DO ENVOLTÓRIO CONVEXO

**Definição 3.77.** Seja  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard,  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície convexa de  $M$  e  $\varepsilon > 0$ . Definimos a **curvatura total de  $\Gamma$**  por

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{G}(\Gamma^\varepsilon), \quad (122)$$

onde  $\Gamma^\varepsilon$  é uma hipersuperfície paralela exterior de  $\Gamma$ , isto é,  $\Gamma^\varepsilon = (d_\Gamma^*)^{-1}(\varepsilon)$ .

Note que a curvatura total de  $\Gamma$  está bem definida. De fato, como  $\Gamma$  é convexa temos que  $\text{reach}(\Gamma) > 0$ . Pelo Lema 3.24 temos que  $d_\Gamma^*$  é  $\mathcal{C}^{1,1}$  próximo a  $\Gamma$  e, consequentemente,  $\Gamma^\varepsilon$  é  $\mathcal{C}^{1,1}$ . Pelo Teorema de Rademacher temos que  $\Gamma^\varepsilon$  é  $\mathcal{C}^2$  em quase todo ponto; portanto,  $\mathcal{G}(\Gamma^\varepsilon)$  está definida em quase todo ponto.

Por outro lado, temos que  $\varepsilon \mapsto \mathcal{G}(\Gamma^\varepsilon)$  é crescente. De fato, considere  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$  e note que pelo Corolário 3.74 temos que  $\mathcal{G}(\Gamma^{\varepsilon_2}) \geq \mathcal{G}(\Gamma^{\varepsilon_1})$ , pois  $\Gamma^{\varepsilon_1}$  é convexo, já que  $\Gamma$  é convexa. Assim, como  $\mathcal{G}(\Gamma^\varepsilon) \geq 0$ , temos que a curvatura total de  $\Gamma$  está bem definida.

**Definição 3.78.** Seja  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard e  $X \subset M$  um subconjunto de  $M$ . Definimos o **envoltório convexo de  $X$** , denotado por  $\text{conv}(X)$ , como a interseção de todos os conjuntos convexos fechados em  $M$  que contém  $X$ . Definimos

$$X_0 = \partial \text{conv}(X).$$

Note que se  $\text{conv}(X)$  tem interior não vazio, então  $X_0$  é uma hipersuperfície convexa. Nesta seção vamos mostrar que a curvatura total positiva de uma hipersuperfície mergulhada  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$  em uma variedade de Cartan-Hadamard não pode ser menor que a curvatura total positiva de  $\Gamma_0$ .

**Definição 3.79.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  e  $p \in X$  um ponto de  $X$ . Definimos o **cone tangente de  $X$  em  $p$** , denotado por  $T_p X$ , como o limite de todas as semirretas partindo de  $p$  e que passam por uma sequência de pontos em  $X \setminus \{p\}$  que converge para  $p$ .

**Definição 3.80.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional,  $X \subset M$  um subconjunto de  $M$  e  $p \in X$  um ponto de  $X$ . Definimos o **cone tangente de  $X$  em  $p$** , denotado por  $T_p X$ , por

$$T_p X = T_0 \left( \exp_p^{-1}(X) \right) \subset T_p M \simeq \mathbb{R}^n.$$

Além disso, dizemos que o cone tangente de  $X$  em  $p$  é **próprio** se ele não é o próprio espaço tangente a  $X$  em  $p$ .

**Definição 3.81.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $X$  é um **cone** se existe um ponto  $p \in X$  tal que para todo  $x \in X$  e  $\lambda > 0$  temos que  $\lambda(x - p) \in X$ . Além disso, dizemos que  $p$  é um **vértice de  $X$** .

**Lema 3.82.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard,  $X \subset M$  um subconjunto convexo de  $M$  e  $p \in \partial X$  um ponto de  $\partial X$ . Então  $T_p X$  é um cone próprio e convexo em  $T_p M$ . Além disso,  $\exp_p^{-1}(X) \subset T_p X$ .

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [CG72, Proposição 1.8, p. 420].  $\square$

**Definição 3.83.** Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Dizemos que uma função  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  é **semicôncava com módulo linear** se  $u$  é contínua em  $A$  e existe  $C \geq 0$  tal que

$$u(x + h) + u(x - h) - 2u(x) \leq C|h|^2,$$

para todo  $x, h \in \mathbb{R}^n$  tais que o segmento de reta que liga  $x - h$  e  $x + h$  está contido em  $A$ . Além disso, uma função  $v : A \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de **semiconvexa com módulo linear** se  $-v$  é semicôncava com módulo linear.

**Lema 3.84.** Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície convexa de  $M$  que limita um domínio  $\Omega \subset M$ . Então para cada ponto  $p \in \Gamma$  existe uma carta local  $(U, \phi)$  de  $M$  numa vizinhança de  $p$  tal que  $\phi(U \cap \Gamma)$  é o gráfico de uma função semiconvexa  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  para algum conjunto aberto  $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ . Em particular,  $\Gamma$  é duas vezes diferenciável em quase todo ponto.

*Demonstração.* Considere  $p \in \Gamma$  arbitrário e tome  $U$  uma vizinhança normal de  $p$  em  $M$ . Tome  $\phi = \exp_p^{-1}$ . Assim, pelo Lema 3.82 temos que  $\phi(\Gamma \cap U) = \exp_p^{-1}(\Gamma \cap U) \subset T_p(\Gamma \cap U) \subset \mathbb{R}^n$  e, além disso,  $T_p(\Gamma \cap U)$  é um cone próprio e convexo em  $T_p M$ , ou seja, existe um hipreplano  $H$  em  $T_p M$  que passa por 0 e é tal que  $T_p(\Gamma \cap U)$  está em um lado. Logo, temos que  $\phi(\Gamma \cap U)$  é o gráfico de uma função  $f : V \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f \geq 0$ . Afirmamos que  $f$  é semiconvexa.

De fato, como  $\Gamma$  é convexa por hipótese, em cada ponto  $q \in \Gamma \cap U$  existe uma esfera  $S_q$  de raio  $r$ , para algum  $r > 0$ , que está contida em  $M \setminus \Omega$ . Note que a imagem de uma vizinhança aberta de  $q$  em  $S_q$  pela  $f$  produz funções  $f_q : V_q \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  tais que  $f_q \leq f$  em uma vizinhança  $V_q$  de  $x_q = f^{-1}(q) \in V$ .

Além disso, a Hessiana de  $f_q$  em  $x_q$  depende continuamente de  $q$ . Assim, como  $f_q < f$  em uma vizinhança  $V_q$  de  $x_q$  temos que, para  $v \in \mathbb{R}^{n-1}$  tal que  $x + v \in V_q$  e  $x - v \in V_q$

$$\frac{f(x_q + v) + f(x_q - v) - 2f(x_q)}{|v|^2} \geq \lim_{|v| \rightarrow 0} \frac{f_q(x_q + v) + f_q(x_q - v) - 2f_q(x_q)}{|v|^2}.$$

Donde temos que, para  $f(x) = \sup_q f(x_q)$ ,

$$\frac{f(x+v) + f(x-v) - 2f(x)}{|v|^2} \geq \sup_q \lim_{|v| \rightarrow 0} \frac{f_q(x_q+v) + f_q(x_q-v) - 2f_q(x_q)}{|v|^2}.$$

Mas, para uma função duas vezes diferenciável  $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  podemos pensar em sua segunda derivada como uma forma quadrática  $\nabla^2 h_p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , que pode ser calculada por

$$\begin{aligned} \nabla^2 h_p(u) &= \lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{dh_{p+u}(u) - dh_{p-u}(u)}{2|u|} \\ &= \lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{h(p+u+u) - h(p+u-u)}{2|u|} - \lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{h(p-u+u) - h(p-u-u)}{2|u|} \\ &= \lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{h(p+2u) + h(p-2u) - 2h(p)}{4|u|^2} \\ &= \lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{h(p+u) + h(p-u) - 2h(p)}{|u|^2}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{f(x+v) + f(x-v) - 2f(x)}{|v|^2} &\geq \sup_q \lim_{|v| \rightarrow 0} \frac{f_q(x_q+v) + f_q(x_q-v) - 2f_q(x_q)}{|v|^2} \\ &= \sup_q \nabla^2 f_{q_{x_q}}(v). \end{aligned}$$

Tomemos assim  $C = \sup_q \nabla^2 f_{q_{x_q}}(v) \leq 0$  e obteremos que

$$f(x+v) + f(x-v) - 2f(x) \geq C|v|^2,$$

para todo  $x \in V$ . Portanto,  $f$  é semiconvexa por definição.

Como  $\phi(\Gamma \cap U)$  é o gráfico de  $f$ , para mostrarmos que  $\Gamma$  é duas vezes diferenciável em quase todo ponto basta mostrarmos que  $f$  é duas vezes diferenciável em quase todo ponto. Mas por [CS04, Teorema 2.3.1 item i, p. 42] temos que  $f$  é duas vezes diferenciável em quase todo ponto, pois  $f$  é semiconvexa com módulo linear.  $\square$

**Definição 3.85.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $B \subset M$  um subconjunto de  $M$ . Dizemos que  $B$  é **fortemente convexo** se  $M$  contém exatamente uma geodésica minimizante entre quaisquer dois pontos de  $B$  e tal geodésica está contida em  $B$ . Dizemos também que  $B$  é **localmente convexo** se cada ponto do fecho  $cl(B)$  de  $B$  tem uma vizinhança localmente convexa  $U$  tal que  $B \cap U$  é fortemente convexo.

**Definição 3.86.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $B \subset M$  um subconjunto aberto de  $M$ . Então o semiespaço  $H_0$  do espaço tangente  $T_p M$  determinado por uma hipersuperfície  $H$  que contém  $\exp_p^{-1}(B)$  em  $p \in \partial B$  é chamado de **elemento de suporte para**  $B$  se  $H_0$  contém os vetores tangentes iniciais de todas as geodésicas minimizantes partindo de  $p$  para pontos de  $B$ .  $H_0$  é um **elemento de suporte local para**  $B$  se, para alguma vizinhança  $U$  de  $p$ ,  $H_0$  é um elemento de suporte para  $B \cap U$ .

**Lema 3.87.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard,  $X \subset M$  um subconjunto compacto de  $M$  e  $p \in X_0 \setminus X$  um ponto que é duas vezes diferenciável. Então a curvatura de  $X_0$  em  $p$  é nula.

*Demonstração.* Seja  $\overline{\text{conv}(X)} = \exp_p^{-1}(\text{conv}(X))$ . Pelo Lema 3.82 temos que  $\overline{\text{conv}(X)} \subset T_p \text{conv}(X)$  e  $T_p \text{conv}(X)$  é um cone próprio em  $T_p M$ . Então existe um hipreplano  $H$  em  $T_p M$  que passa por 0 e é tal que  $\overline{\text{conv}(X)}$  está em um lado.

Note que  $H \cap \overline{\text{conv}(X)}$  é estrelado em  $p$ . De fato, seja  $q \in H \cap \overline{\text{conv}(X)}$ . Considere o segmento  $pq \subset H$  e note que a aplicação  $\exp_p$  leva  $pq$  em uma geodésica em  $M$  que está contida em  $\text{conv}(X)$ , pois  $\text{conv}(X)$  é convexo. Consequentemente,  $pq \subset \overline{\text{conv}(X)}$  como desejado.

Suponha que  $H \cap \overline{\text{conv}(X)}$  tenha mais de um ponto, então existe um segmento de geodésica de  $M$  em  $X_0$  com ponto final em  $p$ , o que faz com que a curvatura em  $p$  se anule, pois geodésicas tem curvatura nula, e temos o requerido.

Então, podemos supor que  $H \cap \overline{\text{conv}(X)} = \{p\}$ . Suponha, por absurdo, que a curvatura de  $X_0$  em  $p$  é positiva. Então existe uma esfera  $\bar{S}$  em  $T_p M$  a qual passa em  $p$  e contém  $\overline{\text{conv}(X)}$  no interior da bola cuja fronteira é  $\bar{S}$ .

Seja  $S = \exp_p(\bar{S})$  e note que  $X$  está contido no interior da região compacta limitada por  $S$  em  $M$ . Note que como a derivada covariante depende somente das primeiras derivadas da métrica temos que a segunda forma fundamental de  $S$  e  $\bar{S}$  coincidem em  $p$ . Em particular  $S$  tem curvatura positiva no fecho de uma vizinhança  $U$  de  $p$ , pois  $\bar{S}$  tem curvatura positiva em  $p$ .

Seja  $S_\varepsilon$  a hipersuperfície paralela interior de  $S$  a uma distância  $\varepsilon$  e  $U_\varepsilon$  a imagem de  $U$  em  $S_\varepsilon$ . Então  $p \notin S_\varepsilon$ , mas podemos escolher  $\varepsilon > 0$  pequeno de modo a termos que  $X \subset S_\varepsilon$ ,  $U_\varepsilon$  tem curvatura positiva e  $S_\varepsilon$  intersecta  $\text{conv}(X)$  somente nos pontos de  $U_\varepsilon$ .

Seja  $Y$  a intersecção da região compacta limitada por  $S_\varepsilon$  com  $\text{conv}(X)$ . Então o interior de  $Y$  é um conjunto localmente convexo em  $M$ . Consequentemente, por [CG72, Teorema 1.6, p. 418] temos que  $Y$  é uma subvariedade mergulhada com fronteira de  $M$ ; além

disso,  $Y$  possui um elemento de suporte local em todo ponto da fronteira. Portanto, por [Ale78, Proposição 1, p. 285] temos que  $Y$  é convexo.

Assim, construímos um conjunto fechado e convexo de  $M$  que contém  $X$  mas não contém  $p$ , o que nos dá a contradição desejada, pois  $p \in \text{conv}(X)$ .  $\square$

**Definição 3.88.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $X \subset M$  um subconjunto convexo de  $M$ . Dizemos que o segmento de geodésica  $\alpha : [0, a] \rightarrow M$  é **perpendicular ao conjunto  $X$**  se  $\alpha(0) \in \partial X$  e  $\langle \alpha'(0), x - \alpha(0) \rangle \leq 0$  para todo  $x \in T_{\alpha(0)}X$ . Dizemos que  $\alpha'(0)$  é o **normal para fora de  $X$  em  $\alpha(0)$** .

**Lema 3.89.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard e  $X \subset M$  um subconjunto convexo de  $M$ . Então os segmentos de geodésica que são perpendiculares a  $X$  em pontos distintos nunca se intersectam.

*Demonstração.* A demonstração pode ser vista em [BO69, Lema 3.2 item 1, p. 7].  $\square$

**Definição 3.90.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada em  $M$ ,  $p \in \Gamma$  um ponto de  $\Gamma$  e  $v \in T_p M$  o normal para fora de  $\Gamma$  em  $p$ . Definimos

$$p_v^\varepsilon = \exp_p(\varepsilon v).$$

Denote por  $\Gamma^\varepsilon$  a hipersuperfície paralela exterior de  $\Gamma$  a uma distância  $\varepsilon$ .

**Lema 3.91.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície convexa de  $M$  que limita um domínio  $\Omega$ . Considere  $p \in \Gamma$ ,  $v$  o normal para fora de  $\Gamma$  em  $p$  e suponha que  $p^\varepsilon$  é um ponto duas vezes diferenciável da hipersuperfície paralela exterior  $\Gamma^\varepsilon$ , para  $\varepsilon \geq 0$ . Então  $p^\varepsilon$  é um ponto duas vezes diferenciável de  $\Gamma^\varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$ . As curvaturas principais de  $\Gamma^\varepsilon$  em  $p^\varepsilon$  podem ser indexadas para que as aplicações  $\varepsilon \mapsto \kappa_i(p^\varepsilon)$  sejam de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $]0, \infty[$ . Além disso, se  $p$  é um ponto duas vezes diferenciável de  $\Gamma$ , então  $\varepsilon \mapsto \kappa_i(p^\varepsilon)$  são de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $[0, \infty[$ .

*Demonstração.* Seja  $I = ]0, \infty[$  e suponha que  $p^\varepsilon$  é um ponto duas vezes diferenciável de  $\Gamma^\varepsilon$ , para algum  $\varepsilon \in I$  fixado. Então podemos construir via coordenadas normais e [FS06, Lema 4.1, p. 211] um par de hipersuperfícies  $S_\pm$  de classe  $\mathcal{C}^2$  em  $M$  que passam por  $p^\varepsilon$ , estão contidas cada uma em um lado de  $\Gamma^\varepsilon$  e têm o mesmo operador forma que  $\Gamma^\varepsilon$  em  $p^\varepsilon$ ,

$$\mathcal{S}_{S_+}(p^\varepsilon) = \mathcal{S}_{\Gamma^\varepsilon}(p^\varepsilon) = \mathcal{S}_{S_-}(p^\varepsilon). \quad (123)$$

Como  $S_\pm$  são de classe  $\mathcal{C}^2$ , suas respectivas funções distâncias são de classe  $\mathcal{C}^2$  em uma vizinhança aberta de  $p^\varepsilon$ , pelo Lema 3.19. Sejam  $S_\pm^\delta$  as hipersuperfícies paralelas de  $S_\pm$

com distância  $\delta \geq -\varepsilon$ . Se  $\delta > 0$  consideramos  $S_{\pm}^{\delta}$  as hipersuperfícies paralelas exteriores, isto é, estas hipersuperfícies estão no lado onde o normal para fora de  $\Gamma^{\varepsilon}$  aponta. Por outro lado, se  $\delta < 0$ , consideramos  $S_{\pm}^{\delta}$  as hipersuperfícies paralelas interiores, como ilustram as Figuras 10 e 11.

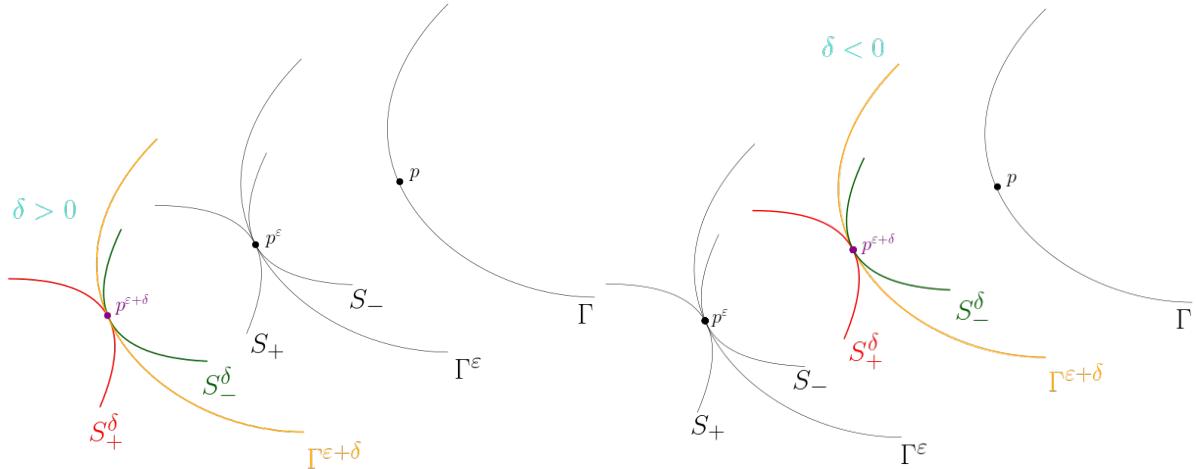


Figura 10: Hipersuperfícies  $S_{\pm}^{\delta}$  para  $\delta > 0$ .      Figura 11: Hipersuperfícies  $S_{\pm}^{\delta}$  para  $\delta < 0$ .

Assim, como as funções distância de  $S_{\pm}$  são de classe  $\mathcal{C}^2$  em uma vizinhança de  $S_{\pm}$ , segue-se que  $S_{\pm}^{\delta}$  são de classe  $\mathcal{C}^2$  para  $\delta$  suficientemente próximo a 0. Além disso, pela equação de Riccati para os operadores forma de  $S_{\pm}^{\delta}$  [Graoo, Corolário 3.3, p. 34], temos que  $\mathcal{S}_{S_{\pm}^{\delta}}$  são determinados pelas condições iniciais  $\mathcal{S}_{S_{\pm}}$ . Então de (123) temos que

$$\mathcal{S}_{S_{+}^{\delta}}(p^{\varepsilon+\delta}) = \mathcal{S}_{S_{-}^{\delta}}(p^{\varepsilon+\delta}).$$

Disto temos que  $p^{\varepsilon+\delta}$  é um ponto duas vezes diferenciável de  $\Gamma^{\varepsilon+\delta}$  para  $\delta$  suficientemente pequeno, pois  $\Gamma^{\varepsilon+\delta}$  tem hipersuperfícies suporte  $S_{\pm}^{\delta}$  em cada lado de  $p^{\varepsilon+\delta}$  e  $\varepsilon \mapsto \mathcal{S}_{\Gamma^{\varepsilon}}(p^{\varepsilon})$  é de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Por outro lado, como o operador forma é auto-adjunto, segue-se de [Kat80, Teorema 6.8, Capítulo 2, p. 122] que seus auto-valores podem ser indexados e então eles são funções de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\varepsilon$ .

Note que do exposto acima temos que o conjunto  $A \subset I$  de distâncias  $\varepsilon$  para as quais  $p^{\varepsilon}$  é um ponto duas vezes diferenciável de  $\Gamma^{\varepsilon}$  e as curvaturas principais de  $\Gamma^{\varepsilon}$  em  $p^{\varepsilon}$  podem ser indexadas para que as aplicações  $\varepsilon \mapsto \kappa_i(p^{\varepsilon})$  sejam de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $I$  é um conjunto aberto. Assim, basta mostrarmos que  $A$  também é fechado e concluímos esta primeira parte do Lema.

Para mostrarmos que  $A \subset I$  é fechado considere  $p^{\varepsilon_i}$  pontos duas vezes diferenciáveis de  $\Gamma^{\varepsilon_i}$  para uma sequência  $\varepsilon_i \in A$  convergindo para  $\varepsilon \in I$ . Se  $\varepsilon = 0$ , então temos que

$\varepsilon \in A$ , pois pelo argumentado acima  $[\varepsilon, \varepsilon + \delta] \subset A$  para algum  $\delta$  e temos o requerido. Suponha então que  $\varepsilon > 0$ .

Note que as curvaturas principais de  $\Gamma^{\varepsilon_i}$  são uniformemente limitadas superiormente, pois uma bola de raio  $\frac{\varepsilon}{2}$  rola livremente dentro de  $\Gamma^{\varepsilon_i}$ , para  $i$  suficientemente grande. Notem também que as curvaturas principais de  $\Gamma^{\varepsilon_i}$  são limitadas inferiormente, pois  $\Gamma^{\varepsilon_i}$  são convexos. Considere, assim,  $(S_{\pm})_i$  um par de hipersuperfícies de classe  $\mathcal{C}^2$  que são suporte para  $\Gamma^{\varepsilon_i}$ , para cada  $i$ , como descritas acima. Por (123) temos que as curvaturas de  $(S_{\pm})_i$  são uniformemente limitadas. Então existe  $\delta > 0$  independente de  $i$  tal que as funções distância de cada  $(S_{\pm})_i$  são de classe  $\mathcal{C}^2$  em uma  $\delta$ -vizinhança de  $p^{\varepsilon_i}$ . Escolha  $i$  suficientemente grande para termos  $|\varepsilon_i - \varepsilon| < \delta$ .

Disto temos que existem hipersuperfícies paralelas  $S_{\pm}$  que são de classe  $\mathcal{C}^2$  e são suporte para  $\Gamma^{\varepsilon}$  numa vizinhança de  $p^{\varepsilon}$ . Portanto,  $p^{\varepsilon}$  é um ponto duas vezes diferenciável de  $\Gamma^{\varepsilon}$ . Dende temos que  $\varepsilon \mapsto \mathcal{S}_{\Gamma^{\varepsilon}}(p^{\varepsilon})$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  e pelo mesmo argumento temos que as curvaturas principais de  $\Gamma^{\varepsilon}$  em  $p^{\varepsilon}$  podem ser indexadas para que as aplicações  $\varepsilon \mapsto \kappa_i(p^{\varepsilon})$  sejam de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $I$ .

Com o exposto acima temos que  $\varepsilon \in A$  e, portanto,  $A$  é fechado. Para mostrarmos a segunda parte, isto é, se  $p$  é um ponto duas vezes diferenciável de  $\Gamma$ , então  $\varepsilon \mapsto \kappa_i(p^{\varepsilon})$  são de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $[0, \infty[$ , basta tomarmos acima  $I = [0, \infty[$  e o resultado segue-se analogamente.  $\square$

**Proposição 3.92.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard e  $X \subset M$  um subconjunto compacto de  $M$ . Suponha que  $\text{conv}(X)$  tem interior não vazio e existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $X_0 = \partial\text{conv}(X)$  em  $M$  tal que  $X \cap U$  é uma hipersuperfície de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$ . Então*

$$\mathcal{G}(X \cap X_0) = \mathcal{G}(X_0).$$

*Demonação.* Primeiramente, seja  $A \subset X_0$  um subconjunto de  $X_0$ , definimos  $A^{\varepsilon}$  como a coleção de todos os pontos  $p_{\nu}^{\varepsilon} = \exp_p(\varepsilon\nu)$  tais que  $p \in A$  e  $\nu$  é o normal para fora de  $X_0$  em  $p$ . Então, pelo Lema 3.89, temos que

$$\mathcal{G}(X_0^{\varepsilon}) = \mathcal{G}((X_0 \setminus X)^{\varepsilon}) + \mathcal{G}((X_0 \cap X)^{\varepsilon}).$$

Note que quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos que  $\mathcal{G}(X_0^{\varepsilon}) \rightarrow \mathcal{G}(X_0)$ , pela Definição 3.77. Então para completar a prova é suficiente mostrar que, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\mathcal{G}((X_0 \setminus X)^{\varepsilon}) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{G}((X_0 \cap X)^{\varepsilon}) \rightarrow \mathcal{G}(X_0 \cap X).$$

Vamos mostrar que  $\mathcal{G}((X_0 \setminus X)^\varepsilon) \rightarrow 0$ . Para isto, fixe  $\bar{\varepsilon} > 0$  e considere  $\bar{p} = p^{\bar{\varepsilon}}$ , e para todo  $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$  seja

$$r^\varepsilon : X_0^{\bar{\varepsilon}} \rightarrow X_0^\varepsilon$$

a projeção  $\bar{p} \mapsto p^\varepsilon$ . Note que  $r^\varepsilon$  é uma aplicação Lipschitz, pois  $X_0^\varepsilon$  é um conjunto convexo para todo  $\varepsilon$  no domínio da aplicação, além disso,  $p^\varepsilon = r^\varepsilon(\bar{p})$ . Considere  $J(\varepsilon) = \text{Jac}_{\bar{p}}(r^\varepsilon)$ . Então, para todo  $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$ ,

$$\mathcal{G}((X_0 \setminus X)^\varepsilon) = \int_{\bar{p} \in (X_0 \setminus X)^{\bar{\varepsilon}}} GK(\varepsilon)J(\varepsilon)d\sigma. \quad (124)$$

onde  $GK(\varepsilon) = GK_{X_0^\varepsilon}(p^\varepsilon)$ . Para mostrarmos que  $\mathcal{G}((X_0 \setminus X)^\varepsilon) \rightarrow 0$  é suficiente mostrar, pelo Teorema da convergência dominada, que para quase todo  $\bar{p} \in (X_0 \setminus X)^{\bar{\varepsilon}}$ ,

1.  $GK(\varepsilon)J(\varepsilon) \leq C$ , para  $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ , e
2.  $GK(\varepsilon)J(\varepsilon) \rightarrow 0$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Para provarmos (1) note que por [Graoo, Teorema 3.11, p. 39] temos que

$$J'(\varepsilon) = (n-1)H(\varepsilon)J(\varepsilon), \quad (125)$$

onde  $H(\varepsilon) = H_{X_0^\varepsilon}(p^\varepsilon) \geq 0$  é a curvatura média de  $X_0^\varepsilon$  em  $p^\varepsilon$ . Indexemos as curvaturas principais  $\kappa_i(\varepsilon) = \kappa_i(p^\varepsilon)$  de  $X_0^\varepsilon$  em  $p^\varepsilon$  como no Lema 3.91. Por [Graoo, Corolário 3.5, p. 36], se  $\kappa_i(\varepsilon)$  são distintos, temos que

$$\kappa'_i(\varepsilon) = -\kappa_i^2(\varepsilon) - R_{nini}(\varepsilon), \quad (126)$$

onde  $R_{nini}(\varepsilon)$  denota a curvatura seccional de  $M$  em  $p^\varepsilon$ , com respeito ao plano gerado pelas direções principais de  $X_0^\varepsilon$  e seu vetor normal. De (126) segue-se que

$$\begin{aligned} GK'(\varepsilon) &= \left( \prod_{i=1}^{n-1} \kappa_i(\varepsilon) \right)' \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \kappa'_j(\varepsilon) \prod_{i \neq j} \kappa_i(\varepsilon) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \left( -\kappa_j^2(\varepsilon) - R_{njnj}(\varepsilon) \right) \prod_{i \neq j} \kappa_i(\varepsilon) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \left( -\kappa_j(\varepsilon) GK(\varepsilon) - R_{njnj}(\varepsilon) \frac{GK(\varepsilon)}{\kappa_j(\varepsilon)} \right) \\ &= -(n-1)H(\varepsilon)GK(\varepsilon) - \sum_{j=1}^{n-1} R_{njnj}(\varepsilon) \frac{GK(\varepsilon)}{\kappa_j(\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (127)$$

Como  $X_0^\varepsilon$  é convexo temos que sua segunda forma fundamental é positiva semi-definida e, portanto,  $\frac{GK(\varepsilon)}{\kappa_j(\varepsilon)} \geq 0$ ,  $1 \leq j \leq n-1$ . Por outro lado, como a variedade  $M$  é uma variedade de Cartan-Hadamard temos que  $R_{njnj}(\varepsilon) \leq 0$ ,  $1 \leq j \leq n-1$ . Logo, de (127), temos que

$$GK'(\varepsilon) = -(n-1)H(\varepsilon)GK(\varepsilon) - \sum_{j=1}^{n-1} R_{njnj}(\varepsilon) \frac{GK(\varepsilon)}{\kappa_j(\varepsilon)} \geq -(n-1)H(\varepsilon)GK(\varepsilon). \quad (128)$$

Como (128) vale quando  $\kappa_i(\varepsilon)$  são distintos, e  $GK(\varepsilon)$  e  $H(\varepsilon)$  são de classe  $\mathcal{C}^1$ , pelo Lema 3.91, temos que (128) vale em geral. Então temos por (128) e (125) que

$$\begin{aligned} (GK(\varepsilon)J(\varepsilon))' &= GK'(\varepsilon)J(\varepsilon) + GK(\varepsilon)J'(\varepsilon) \\ &\geq -(n-1)H(\varepsilon)GK(\varepsilon)J(\varepsilon) + (n-1)H(\varepsilon)GK(\varepsilon)J(\varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (129)$$

Integrando-se (129) entre  $\varepsilon$  e  $\bar{\varepsilon}$  e utilizando-se o Teorema fundamental do cálculo obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\bar{\varepsilon}} (GK(t)J(t))' dt &\geq 0 \\ GK(\bar{\varepsilon})J(\bar{\varepsilon}) - GK(\varepsilon)J(\varepsilon) &\geq 0 \\ GK(\varepsilon)J(\varepsilon) &\leq GK(\bar{\varepsilon})J(\bar{\varepsilon}). \end{aligned} \quad (130)$$

Note que  $J(\bar{\varepsilon}) = 1$ , pois  $r^{\bar{\varepsilon}}$  é a aplicação identidade. Além disso, a segunda forma fundamental de  $X_0^{\bar{\varepsilon}}$  é limitada superiormente, pois  $X_0^{\bar{\varepsilon}}$  é convexo e portanto tem suporte por baixo por bolas de raio  $\bar{\varepsilon}$  em cada ponto, portanto,  $GK(\bar{\varepsilon})$  é uniformemente limitado superiormente. Logo, de (130), temos, para  $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ , que

$$GK(\varepsilon)J(\varepsilon) \leq GK(\bar{\varepsilon})J(\bar{\varepsilon}) = GK(\bar{\varepsilon}) \leq C. \quad (131)$$

Para obtermos (2) considere  $\bar{p}$  um ponto duas vezes diferenciável de  $(X_0 \setminus X)^{\bar{\varepsilon}}$ . Pelo Lema 3.91 temos que  $p^\varepsilon$  é um ponto duas vezes diferenciável de  $(X_0 \setminus X)^\varepsilon$  para todo  $\varepsilon \in ]0, \bar{\varepsilon}]$ . Denote por  $\kappa_i(\varepsilon)$  as curvaturas principais de  $(X_0 \setminus X)^\varepsilon$  em  $p^\varepsilon$  e também  $GK_i(\varepsilon) = \frac{GK(\varepsilon)}{\kappa_i(\varepsilon)}$ . Então usando (128) e (126) temos

$$\begin{aligned} GK'_i(\varepsilon) &= (\Pi_{j \neq i} \kappa_j(\varepsilon))' \\ &= \sum_{l \neq i} \kappa'_l(\varepsilon) \Pi_{j \neq i, j \neq l} \kappa_j(\varepsilon) \\ &= \sum_{l \neq i} \left( -\kappa_l^2(\varepsilon) - R_{nlnl}(\varepsilon) \right) \Pi_{j \neq i, j \neq l} \kappa_j(\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l \neq i} \left( -\kappa_l(\varepsilon) GK_i(\varepsilon) - R_{nl nl} \frac{GK_i(\varepsilon)}{\kappa_l(\varepsilon)} \right) \\
&= -((n-1)H(\varepsilon) - \kappa_i(\varepsilon)) GK_i(\varepsilon) - \sum_{l \neq i} R_{nl nl} \frac{GK_i(\varepsilon)}{\kappa_l(\varepsilon)} \\
&= -(n-1)H(\varepsilon) GK_i(\varepsilon) + GK(\varepsilon) - \sum_{l \neq i} R_{nl nl} \frac{GK_i(\varepsilon)}{\kappa_l(\varepsilon)}. \tag{132}
\end{aligned}$$

Como  $X_0^\varepsilon$  é convexo temos que sua segunda forma fundamental é positiva semi-definida e, portanto,  $GK(\varepsilon) \geq 0$  e  $\frac{GK(\varepsilon)}{\kappa_l(\varepsilon)} \geq 0$ ,  $l \neq i$ . Por outro lado, como a variedade  $M$  é uma variedade de Cartan-Hadamard temos que  $R_{nl nl}(\varepsilon) \leq 0$ ,  $l \neq i$ . Logo, de (132), temos que

$$GK'_i(\varepsilon) = -(n-1)H(\varepsilon)GK_i(\varepsilon) + GK(\varepsilon) - \sum_{l \neq i} R_{nl nl} \frac{GK_i(\varepsilon)}{\kappa_l(\varepsilon)} \geq -(n-1)H(\varepsilon)GK_i(\varepsilon). \tag{133}$$

Logo, de (125) e (133) temos que

$$\begin{aligned}
(GK_i(\varepsilon)J(\varepsilon))' &= GK'_i(\varepsilon)J(\varepsilon) + GK_i(\varepsilon)J'(\varepsilon) \\
&\geq -(n-1)H(\varepsilon)GK_i(\varepsilon)J(\varepsilon) + (n-1)H(\varepsilon)GK_i(\varepsilon)J(\varepsilon) = 0. \tag{134}
\end{aligned}$$

Integrando-se (134) entre  $\varepsilon$  e  $\bar{\varepsilon}$  e utilizando-se o Teorema fundamental do cálculo obtemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\varepsilon}^{\bar{\varepsilon}} (GK_i(t)J(t))' dt \geq 0 \\
&GK_i(\bar{\varepsilon})J(\bar{\varepsilon}) - GK_i(\varepsilon)J(\varepsilon) \geq 0 \\
&GK_i(\varepsilon)J(\varepsilon) \leq GK_i(\bar{\varepsilon})J(\bar{\varepsilon}). \tag{135}
\end{aligned}$$

Note que  $J(\varepsilon) \leq 1$ , pois em variedades de Cartan-Hadamard a projeção sobre conjuntos convexos é não-expansível por [BH99, Corolário 2.5, item (2), p. 178]. Além disso, a segunda forma fundamental de  $X_0^{\bar{\varepsilon}}$  é limitada superiormente, pois  $X_0^{\bar{\varepsilon}}$  é convexo e portanto tem suporte por baixo por bolas de raio  $\bar{\varepsilon}$  em cada ponto, portanto,  $GK_i(\bar{\varepsilon})$  é uniformemente limitado superiormente. Logo, de (135), temos, para  $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ , que

$$GK_i(\varepsilon)J(\varepsilon) \leq GK_i(\bar{\varepsilon})J(\bar{\varepsilon}) \leq GK_i(\bar{\varepsilon}) \leq C. \tag{136}$$

De (136) segue-se que

$$GK(\varepsilon)J(\varepsilon) \leq C\kappa_i(\varepsilon)$$

para todo  $0 \leq i \leq n-1$ . Em particular, se  $\inf_i \kappa_i(\varepsilon) \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , então  $GK(\varepsilon)J(\varepsilon) \rightarrow 0$  e obtemos (2).

Resta mostrar que  $\inf_i \kappa_i(\varepsilon) \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Para provarmos isto considere  $S$  uma superfície positivamente curvada com fronteira que contém  $p$  em seu interior, é ortogonal ao normal para fora  $\nu$  de  $X_0$  em  $p \exp_p(\varepsilon \nu) = \bar{p}$ , e seu vetor de curvatura média paralelo a  $-\nu$ . Note que podemos construir  $S$  tomando-se uma vizinhança da imagem sob a aplicação exponencial de uma esfera em  $T_p M$  de raio suficientemente grande que passa por  $p$  e é ortogonal a  $\nu$ . Em particular note que as curvaturas principais de  $S$  podem ser arbitrariamente pequenas.

Agora note que  $S$  está contida no interior de  $\text{conv}(X)$ . Suponha, por absurdo que não, neste caso contrário, podemos substituir  $S$  por uma superfície com curvatura menor, assim, teríamos que  $\partial S$  é disjunto de  $\text{conv}(X)$ . Deste modo, procedendo como no Lema 3.87, podemos tomar uma superfície paralela interior a  $S$  ao longo de  $-\nu$  por uma distância  $\delta$  suficientemente pequena de modo a podermos substituir  $\text{conv}(X)$  por um conjunto convexo menor contendo  $X$ , o que não é possível.

Considere  $S^\varepsilon$  a hipersuperfície paralela exterior de  $S$ . Para  $\varepsilon$  pequeno,  $S^\varepsilon$  permanece positivamente curvada, pela continuidade da curvatura. Além disso, como  $S$  sempre tem um ponto no interior de  $\text{conv}(X)$ , segue-se que  $S^\varepsilon$  sempre tem um ponto no interior do conjunto limitado por  $X_0^\varepsilon$ . Consequentemente  $\inf_i \kappa_i(\varepsilon)$  não pode ser maior que todas as curvaturas principais de  $S^\varepsilon$  em  $p^\varepsilon$ , pois  $S^\varepsilon$  é suporte em cada ponto. Mas as curvaturas principais de  $S$  podem ser tomadas arbitrariamente pequenas. Então as curvaturas principais de  $S^\varepsilon$  podem ser tomadas arbitrariamente pequenas também, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Portanto  $\inf_i \kappa_i(\varepsilon) \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , o que completa a prova de (2).

Nos resta mostrar que  $\mathcal{G}((X_0 \cap X)^\varepsilon) \rightarrow \mathcal{G}(X_0 \cap X)$ . Mas para isto basta notar que  $GK(\varepsilon)J(\varepsilon) \rightarrow GK(0)J(0)$  pelo Lema 3.91; com o item (1) e o Teorema da convergência dominada segue-se o requerido.  $\square$

**Definição 3.93.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície fechada, mergulhada de  $M$  e de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$ . Definimos a **curvatura total positiva de  $\Gamma$**  como

$$\mathcal{G}_+(\Gamma) = \int_{\Gamma_+} GK d\sigma,$$

onde  $\Gamma_+ \subset \Gamma$  é a região onde  $GK \geq 0$ .

**Corolário 3.94.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície fechada, mergulhada de  $M$  e de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$ . Então

$$\mathcal{G}_+(\Gamma) \geq \mathcal{G}(\Gamma_0).$$

*Demonação.* Primeiramente note que  $\mathcal{G}_+(\Gamma) \geq \mathcal{G}_+(\Gamma \cap \Gamma_0)$ . Além disso, como  $\Gamma$  tem suporte  $\Gamma_0$  por cima,  $GK_\Gamma(p) \geq GK_{\Gamma_0}(p) \geq 0$  para todos os pontos  $p \in \Gamma \cap \Gamma_0$  duas vezes diferenciáveis. Consequentemente,  $\mathcal{G}_+(\Gamma \cap \Gamma_0) = \mathcal{G}(\Gamma \cap \Gamma_0)$ . Por fim, pela Proposição 3.92, temos que  $\mathcal{G}(\Gamma \cap \Gamma_0) = \mathcal{G}(\Gamma_0)$ , o que completa a demonstração.  $\square$



# 4

## A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

**Teorema 4.1.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard e  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície mergulhada de  $M$ . Suponha que vale a desigualdade*

$$\mathcal{G}(\Gamma) \geq \text{vol}(\mathbb{S}^{n-1}), \quad (137)$$

*onde  $\text{vol}$  é o volume e  $\mathbb{S}^{n-1}$  é a esfera unitária de  $\mathbb{R}^n$ . Então, para  $\Omega \subset M$  um conjunto limitado de  $M$ , vale a desigualdade isoperimétrica*

$$\text{per}(\Omega)^n \geq \frac{\text{per}(\mathbb{B}^n)^n}{\text{vol}(\mathbb{B}^n)^{n-1}} \text{vol}(\Omega)^{n-1}, \quad (138)$$

*onde  $\text{per}$  é o perímetro e  $\mathbb{B}^n$  é a bola unitária de  $\mathbb{R}^n$ . E vale a igualdade somente para bolas euclidianas.*

**Definição 4.2.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $U \subset M$  um subconjunto aberto de  $M$ . Definimos o **perfil isoperimétrico** de  $U$  como a função  $\mathcal{I}_U : [0, \text{vol}(U)] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\mathcal{I}_U(v) = \inf\{\text{per}(\Omega) : \Omega \subset U, \text{vol}(\Omega) = v, \text{diam}(\Omega) < \infty\},$$

*onde  $\text{diam}$  é o diâmetro,  $\text{vol}$  a medida de Lebesgue,  $\text{per}$  o perímetro e  $\mathcal{I}_U(0) = 0$ .*

Note que para provar (138) é suficiente provar que

$$\mathcal{I}_M \geq \mathcal{I}_{\mathbb{R}^n},$$

para uma variedade de Cartan-Hadamard  $M$ . De fato, seja  $v < \infty$  e considere  $\Omega \subset M$  um conjunto aberto de  $M$  tal que  $\text{vol}(\Omega) = v$ ,  $\text{diam}(\Omega) < \infty$  e  $\mathcal{I}_M(v) = \text{per}(\Omega)$ . Considere também  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\text{vol}(D) = v$ ,  $\text{diam}(D) < \infty$  e  $\mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}(v) = \text{per}(D)$ . Da hipótese temos que  $\text{per}(\Omega) \geq \text{per}(D)$ . Do problema isoperimétrico em  $\mathbb{R}^n$  temos que existe  $\mathbb{B}^n$  tal que  $\text{vol}(\mathbb{B}^n) = v$  e  $\text{per}(D) \geq \text{per}(\mathbb{B}^n)$ . Portanto, temos que  $\text{per}(\Omega) \geq \text{per}(\mathbb{B}^n)$ , donde segue-se o requerido. Note também que é suficiente mostrar que  $\mathcal{I}_B \geq \mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}$  para uma família de bolas geodésicas abertas  $B \subset M$  cujo raio cresce arbitrariamente e eventualmente cobre um conjunto limitado  $\Omega \subset M$ .

**Definição 4.3.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $B \subset M$  uma bola geodésica de  $M$ . Dizemos que  $\Omega \subset B$  é uma **região isoperimétrica** de  $M$  se  $\Omega$  tem o menor perímetro dado um volume, ou satisfaz  $\text{per}(\Omega) = \mathcal{I}_B(\text{vol}(\Omega))$ .

**Lema 4.4.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard e  $B \subset M$  uma bola geodésica aberta. Então, para  $v \in ]0, \text{vol}(B)[$ , existe uma região isoperimétrica  $\Omega \subset B$  com  $\text{vol}(\Omega) = v$ . Seja  $\Gamma = \partial\Omega$ ,  $H$  a curvatura média normalizada de  $\Gamma$  (sempre que esta estiver definida) e  $\Gamma_0 = \partial\text{conv}(\Gamma)$ . Então

1.  $\Gamma \cap B$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$  a menos do conjunto fechado  $\text{sing}(\Gamma)$  de dimensão de Haussdorff no máximo  $n - 8$ . Além disso,  $H \equiv H_0 = H_0(v)$  é constante em  $(\Gamma \cap B) \setminus \text{sing}(\Gamma)$ .
2.  $\Gamma$  é de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$  dentro de uma vizinhança aberta  $U$  de  $\partial B$  em  $M$ . Além disso,  $H \leq H_0$  em quase todo ponto de  $U \cap \Gamma$ .
3.  $d(\text{sing}(\Gamma), \Gamma_0) \geq \varepsilon_0 > 0$ .

Em particular,  $\Gamma$  é de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$  dentro de uma vizinhança aberta de  $\Gamma_0$  em  $M$ .

*Demonstração.* (1) Segue de [GMT83, Teorema 2, p. 29].

(2) Segue de [Str97, Teorema 3.6, p. 659].

(3) Primeiramente note que  $\text{sing}(\Gamma)$  é um conjunto fechado pelo item (1) do Lema 4.4. Além disso, temos que  $\text{sing}(\Gamma) \subset B$  pelo item (2) do Lema 4.4. Então é suficiente mostrar que os pontos  $p \in \Gamma \cap \Gamma_0 \cap B$  são não singulares. Esse é o caso, pois  $T_p\Gamma \subset T_p\text{conv}(\Gamma)$  pelo Lema 3.82, que é um subconjunto convexo de  $T_pM$ , pelo Lema 3.82. Portanto,  $T_p\Gamma$  está contido em um semiespaço de  $T_pM$  gerado por qualquer hiperplano de  $T_p\text{conv}(\Gamma)$  em  $p$ . Disso temos que  $T_p\Gamma$  é um hiperplano por [Sim83, Corolário 37.6, p. 220]. Consequentemente,  $\Gamma$  será de classe  $\mathcal{C}^\infty$  em uma vizinhança de  $p$  por [Moro3, Proposição 3.5, p. 5046].  $\square$

Seja  $\Omega \subset B$  a região isoperimétrica de volume  $v$  dada pelo Lema 4.4. Pela Proposição 3.92 temos que  $\mathcal{G}(\Gamma_0) = \mathcal{G}(\Gamma \cap \Gamma_0)$ . De (137) e da Definição 3.77 podemos aplicar o Corolário 3.74 e obtemos que  $\mathcal{G}(\Gamma_0) \geq n\omega_n$ . Então temos que

$$n\omega_n \leq \mathcal{G}(\Gamma_0) = \mathcal{G}(\Gamma \cap \Gamma_0) = \int_{\Gamma \cap \Gamma_0} GKd\sigma, \quad (139)$$

onde  $GK$  denota a curvatura de Gauss-Kronecker de  $\Gamma$ . Note que  $GK \geq 0$  em  $\Gamma \cap \Gamma_0$ , pois todos os pontos de  $\Gamma \cap \Gamma_0$  são localmente convexos. Além disso, pela desigualdade

geométrica-aritmética temos que  $GK \leq H^{n-1}$  em  $\Gamma \cap \Gamma_0$ . Então, por (139) e pelo Lema 4.4, temos que

$$\begin{aligned}
n\omega_n &\leq \int_{\Gamma \cap \Gamma_0} GK d\sigma \\
&\leq \int_{\Gamma \cap \Gamma_0} H^{n-1} d\sigma \\
&= \int_{\Gamma \cap \Gamma_0 \cap \partial B} H^{n-1} d\sigma + \int_{\Gamma \cap \Gamma_0 \cap B} H^{n-1} d\sigma \\
&= \int_{\Gamma \cap \Gamma_0 \cap \partial B} H^{n-1} d\sigma + \int_{\Gamma \cap \Gamma_0 \cap B} H_0^{n-1} d\sigma \\
&\leq \int_{\Gamma \cap \Gamma_0 \cap \partial B} H_0^{n-1} d\sigma + \int_{\Gamma \cap \Gamma_0 \cap B} H_0^{n-1} d\sigma \\
&\leq \int_{\Gamma \cap \partial B} H_0^{n-1} d\sigma + \int_{\Gamma \cap B} H_0^{n-1} d\sigma \\
&= H_0^{n-1} \text{per}(\Omega).
\end{aligned} \tag{140}$$

Consequentemente segue-se que

$$H_0(\text{vol}(\Omega)) \geq \left( \frac{n\omega_n}{\text{per}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \overline{H}_0(\text{per}(\Omega)), \tag{141}$$

onde  $\overline{H}_0(a)$  é a curvatura média de uma bola de perímetro  $a$  em  $\mathbb{R}^n$ . Por [Rit17, Teorema 3.2, p. 248] temos que  $\mathcal{I}_B$  é contínua e não-decrescente e, portanto, pelo Teorema de Lebesgue sobre diferenciação de funções monotônicas [RSN56, Teorema 1, p. 5],  $\mathcal{I}_B$  é diferenciável em quase todo ponto. Além disso, por [Hsi92, Lema 4, p. 170]  $\mathcal{I}'_B(v) = (n-1)H_0(v)$  em todos os pontos de diferenciabilidade  $v \in ]0, \text{vol}(B)[$ . Então, por (141), temos, em quase todo ponto de  $[0, \text{vol}(B)]$ , que

$$\mathcal{I}'_B(v) = (n-1)H_0(v) \geq (n-1)\overline{H}_0(v) = \mathcal{I}'_{\mathbb{R}^n}(v). \tag{142}$$

Consequentemente, integrando-se (142) entre 0 e  $v$  e utilizando-se o Teorema fundamental do cálculo obtemos que,

$$\begin{aligned}
\int_0^v \mathcal{I}'_B(t) dt &\geq \int_0^v \mathcal{I}'_{\mathbb{R}^n}(t) dt \\
\mathcal{I}_B(v) - \mathcal{I}_B(0) &\geq \mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}(v) - \mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}(0) \\
\mathcal{I}_B(v) &\geq \mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}(v),
\end{aligned} \tag{143}$$

para todo  $v \in [0, \text{vol}(B)[$ , como desejado. Assim, estabelecemos (137) para variedades de Cartan-Hadamard. Nos resta mostrar que a igualdade vale em (137) somente para bolas Euclidianas.

**Lema 4.5.** Seja  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard e  $\Omega \subset M$  um subconjunto limitado de  $M$  tal que vale a igualdade na inequação (138). Então  $\Gamma$  é estritamente convexa, de classe  $C^\infty$  e tem curvatura média constante  $H_0$ . Além disso, as curvaturas principais de  $\Gamma$  são todas iguais a  $H_0$ .

*Demonstração.* Se vale a igualdade na inequação (138) então vale a igualdade na inequação (143) para alguma bola  $B \subset M$  grande o suficiente para conter  $\Omega$  e  $\text{vol}(\Omega) = v$ . Isso, por sua vez faz com que valha a igualdade nas inequações (141) e (140). Note que da igualdade em (140) temos, em particular, que

$$\int_{\Gamma \cap \Gamma_0} H^{n-1} d\sigma = \int_{\Gamma \cap \partial B} H_0^{n-1} d\sigma + \int_{\Gamma \cap B} H_0^{n-1} d\sigma. \quad (144)$$

Como  $H_0 \geq 0$  e  $H \geq 0$  nos respectivos domínios temos, de (144), que

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma \setminus \Gamma_0) = 0. \quad (145)$$

Assim, por (145), temos que

$$\Gamma = \Gamma_0. \quad (146)$$

Como ilustram as Figuras 13 e 12.

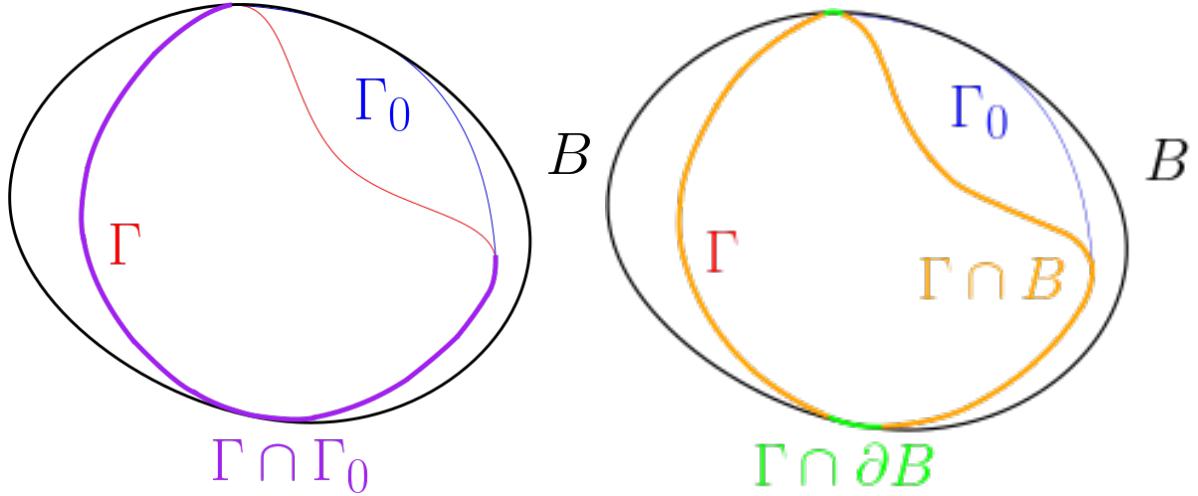


Figura 12: Em roxo a área de integração do Figura 13: Em laranja e verde as áreas de integração do lado esquerdo de (144) e do lado direito de (144)

Note também da igualdade em (140) temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \cap \Gamma_0 \cap \partial B} H^{n-1} d\sigma + \int_{\Gamma \cap \Gamma_0 \cap B} H_0^{n-1} d\sigma &= \int_{\Gamma \cap \Gamma_0 \cap \partial B} H_0^{n-1} d\sigma + \int_{\Gamma \cap \Gamma_0 \cap B} H_0^{n-1} d\sigma \\ \int_{\Gamma \cap \Gamma_0 \cap \partial B} H^{n-1} d\sigma &= \int_{\Gamma \cap \Gamma_0 \cap B} H_0^{n-1} d\sigma. \end{aligned} \quad (147)$$

Logo, de (147), temos que

$$H^{n-1} = H_0^{n-1}, \quad (148)$$

em  $(\Gamma \cap B) \setminus \text{sing}(\Gamma)$ . Novamente pela igualdade em (140) temos que

$$\int_{\Gamma \cap \Gamma_0} GK d\sigma = \int_{\Gamma \cap \Gamma_0} H^{n-1} d\sigma. \quad (149)$$

Logo, de (148) e (149) temos que

$$GK = H^{n-1} = H_0^{n-1}. \quad (150)$$

em  $(\Gamma \cap B) \setminus \text{sing}(\Gamma)$ .

Por (146),  $\Gamma$  é convexa. Afirmamos que para todo ponto  $p \in \Gamma \cap B$ ,  $T_p\Gamma$  é um hiperplano. De fato  $T_p\Gamma \subset T_p\text{conv}(\Gamma)$  pelo Lema 3.82, que é um subconjunto convexo de  $T_pM$ , pelo Lema 3.82. Portanto,  $T_p\Gamma$  está contido em um semiespaço de  $T_pM$  gerado por qualquer hiperplano de  $T_p\text{conv}(\Gamma)$  em  $p$ . Disso temos que  $T_p\Gamma$  é um hiperplano por [Sim83, Corolário 37.6, p. 220].

Assim,  $\Gamma \cap B$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Por outro lado, pelo Lema 4.4 item (2), próximo a  $\partial B$ ,  $\Gamma$  é localmente o gráfico de uma função de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$  e, então, todo ponto de  $\Gamma$  tem um normal unitário que é Hölder contínua, isto é, para  $n(p)$  e  $n(q)$  vetores normais a  $\Gamma$  em  $p$  e  $q$ , respectivamente, tem-se que  $|n(p) - n(q)| \leq C|p - q|^\alpha$ , onde  $C > 0$  e  $0 < \alpha \leq 1$ . Além disso,  $\Gamma$  tem  $H^{n-1}$  em quase todo ponto curvatura média  $H_0$ , por (145). Disso segue-se que  $\Gamma$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$  em uma vizinhança de  $\partial B$ . Por fim, por (150) implica que todas as curvaturas principais de  $\Gamma$  são iguais a  $H_0$  em todos os pontos.  $\square$

**Definição 4.6.** Sejam  $(M, d)$  um espaço métrico e  $X, Y \subset M$  dois subconjuntos não-vazios de  $M$ . Definimos a **distância de Hausdorff de  $X$  e  $Y$**  por

$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} d_Y(x), \sup_{y \in Y} d_X(y) \right\}.$$

**Lema 4.7.** Sejam  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard,  $\Gamma \subset M$  uma hipersuperfície convexa de  $M$  e  $\Gamma_i$  uma sequência de hipersuperfícies convexas de classe  $\mathcal{C}^2$  que convergem para  $\Gamma$  com respeito a distância de Hausdorff. Suponha que as curvaturas principais de  $\Gamma_i$  sejam limitadas por cima por uma constante uniforme. Então  $\Gamma$  é de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$ .

*Demonstração.* Seja  $p \in M$  um ponto de  $M$ ,  $\bar{\Gamma} = \exp_p^{-1}(\Gamma)$  e  $\bar{\Gamma}_i = \exp_p^{-1}(\Gamma_i)$ . Então  $\bar{\Gamma}_i$  é de classe  $\mathcal{C}^2$  e suas curvaturas principais são uniformemente limitadas por cima. Segue-se disso e do Teorema do rolamento de Blaschke [How99, Teorema 1.1, p. 472]

que uma bola de raio  $\varepsilon$  rola dentro de  $\bar{\Gamma}_i$ . Então uma bola de raio  $\varepsilon$  rola dentro de  $\bar{\Gamma}$ , ou  $\text{reach}(\Gamma) \geq 0$ . Consequentemente, pelo Lema 3.24,  $\bar{\Gamma}$  é de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$ , donde temos que  $\Gamma$  é de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$ .  $\square$

Agora, suponha que valha a igualdade em (138) para alguma região  $\Omega$  em uma variedade de Cartan-Hadamard  $M$ . Assim vale a igualdade sucessivamente em (141), (140) e (139). Então temos que  $\mathcal{G}(\Gamma_0) = n\omega_n$ . Mas, pelo Lema 4.5, temos que  $\Gamma$  é convexo, ou  $\Gamma = \Gamma_0$ . Então

$$\mathcal{G}(\Gamma) = n\omega_n. \quad (151)$$

Seja  $\lambda_1 = \text{reach}(\Gamma)$ . Note que, pelo Lema 4.5,  $\Gamma$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Então, pelo Lema 3.24,  $\lambda_1 > 0$ . Seja  $u = d_\Gamma^*$ . Então, pelo Lema 3.19,  $\Gamma_\lambda = u^{-1}(-\lambda)$  será uma hiperfuperfície de classe  $\mathcal{C}^\infty$  para  $\lambda \in [0, \lambda_1]$ .

Para um ponto  $p \in \Gamma$  arbitrário, seja  $p_\lambda$  o ponto obtido por movermos  $p$  a uma distância  $\lambda$  ao longo da geodésica para dentro ortogonal a  $\Gamma$  em  $p$ , e defina  $R_{lnln}(\lambda) = R_{lnln}(p_\lambda)$ . Afirmamos que, para  $\lambda \in [0, \lambda_1]$ ,

$$R_{lnln}(\lambda) \equiv 0. \quad (152)$$

De fato, note que para  $\lambda$  suficientemente pequeno  $\Gamma_\lambda$  é positivamente curvado pela continuidade da curvatura. Seja  $\bar{\lambda}$  o supremo de  $x < \lambda_1$  tal que  $\Gamma_\lambda$  é positivamente curvada em  $[0, x]$ . De (137) temos que  $\mathcal{G}(\Gamma_\lambda) \geq n\omega_n$ . Então, por (151) e pelo Corolário 3.74, temos que

$$0 \geq n\omega_n - \lim_{\lambda \rightarrow \bar{\lambda}} \mathcal{G}(\Gamma_\lambda) = \mathcal{G}(\Gamma) - \lim_{\lambda \rightarrow \bar{\lambda}} \mathcal{G}(\Gamma_\lambda) = - \int_{\Omega \setminus D_{\bar{\lambda}}} R_{rnrr} \frac{GK}{\kappa_r} d\mu \geq 0,$$

onde  $D_{\bar{\lambda}}$  é o limite das regiões limitadas por  $\Gamma_\lambda$  quando  $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ . Então  $R_{rnrr}(\lambda) \equiv 0$  para  $\lambda < \bar{\lambda}$ . Como  $R_{rnrr}(\lambda) \equiv 0$  para  $\lambda < \bar{\lambda}$  temos, por [Graoo, Corolário 3.3, p. 34], que

$$\mathcal{S}'(\lambda) = \mathcal{S}^2(\lambda), \quad (153)$$

para  $\lambda < \bar{\lambda}$ , onde  $\mathcal{S}(\lambda)$  é o operador forma de  $\Gamma_\lambda$  em  $p_\lambda$ . Pelo Lema 4.5 temos que  $\mathcal{S}(0) = H_0 Id$ , onde  $Id$  é a transformação identidade. Então, resolvendo-se (153) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'(\lambda) &= \mathcal{S}^2(\lambda) \\ \frac{\mathcal{S}'(\lambda)}{\mathcal{S}^2(\lambda)} &= 1 \\ \int_0^\lambda \frac{\mathcal{S}'(t)}{\mathcal{S}^2(t)} dt &= \int_0^\lambda 1 dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{\mathcal{S}(t)}\right)_0^\lambda &= \lambda \\
-\frac{1}{\mathcal{S}(\lambda)} + \frac{1}{\mathcal{S}(0)} &= \lambda \\
\frac{1}{\mathcal{S}(\lambda)} &= \frac{1}{\mathcal{S}(0)} - \lambda \\
\mathcal{S}(\lambda) &= \frac{H_0}{1 - \lambda H_0} Id.
\end{aligned} \tag{154}$$

para  $\lambda < \bar{\lambda}$ . De (154) temos que  $\mathcal{S}(\lambda) = H_\lambda Id$ , onde

$$H_\lambda = \frac{H_0}{1 - \lambda H_0}. \tag{155}$$

Agora suponha que  $\bar{\lambda} < \lambda_1$ . Então  $\Gamma_{\bar{\lambda}}$  será uma hipersuperfície de classe  $\mathcal{C}^2$  e, portanto, por continuidade, terá curvatura principal constante  $H_{\bar{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow \bar{\lambda}} H_\lambda$ . Como  $\Gamma_{\bar{\lambda}}$  é uma hipersuperfície fechada,  $H_{\bar{\lambda}} > 0$ . Então  $\Gamma_{\bar{\lambda}}$  tem curvatura positiva, o que não é possível se  $\bar{\lambda} < \lambda_1$ . Então concluímos que  $\bar{\lambda} = \lambda_1$ , o que prova (152).

Agora suponha, por absurdo, que as curvaturas principais de  $\Gamma_\lambda$  sejam uniformemente limitadas superiormente para  $\lambda < \lambda_1$ , então  $\Gamma_{\lambda_1}$  é uma hipersuperfície de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$  pelo Lema 4.7, o que não é possível, pois  $\lambda_1 = \text{reach}(\Gamma)$ . Então algumas curvaturas principais de  $\Gamma_\lambda$  crescem arbitrariamente, quando  $\lambda \rightarrow \lambda_1$ . Mas  $\Gamma_\lambda$  tem curvaturas principais constantes. Então todas as curvatura principais de  $\Gamma_\lambda$  crescem arbitrariamente. Logo, pela equação de Gauss, todas as curvaturas seccionais de  $\Gamma_\lambda$  crescem arbitrariamente. Consequentemente, pelo Teorema da Bonnet-Myers, o diâmetro de  $\Gamma_\lambda$  converge para zero. Em outras palavras,  $\Gamma_\lambda$  colapsa para um ponto, digamos  $x_0$ , quando  $\lambda \rightarrow \lambda_1$ .

Então  $\Gamma = \partial B_{\lambda_1}$  ou  $\Omega = B_{\lambda_1}$ , uma bola geodésica de raio  $\lambda_1$  e centro  $x_0$ . Além disso, a condição  $R_{lnln} = 0$  significa que ao longo de cada segmento de geodésica que conecta  $x_0$  a  $\partial B_{\lambda_1}$  a curvatura seccional de  $M$  com respeito aos planos tangentes desses segmentos de geodésica se anula. Então, pelo Lema 3.75, todas as curvaturas seccionais de  $B_{\lambda_1}$  se anulam, o que prova o requerido.

## 4.1 A DESIGUALDADE PARA CURVATURA TOTAL EM DIMENSÕES 2 E 3

Começamos obtendo a desigualdade para curvatura total em dimensão 3.

Sejam  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard 3-dimensional e  $\Gamma$  uma hipersuperfície convexa de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$  em  $M$ , isto é, uma subvariedade convexa de  $M$  de dimensão 2. Então queremos mostrar que

$$\mathcal{G}(\Gamma) \geq \text{vol}(\mathbb{S}^2), \quad (156)$$

onde  $\mathbb{S}^2$  denota a esfera unitária de  $\mathbb{R}^3$  e  $\text{vol}$  denota seu volume.

Suponha, primeiramente, que  $\Gamma$  é suave e note que  $\text{vol}(\mathbb{S}^2) = 4\pi$ .

Considere  $K_\Gamma$  a curvatura seccional de  $\Gamma$  dada pela métrica induzida de  $M$ ,  $K_M$  a curvatura seccional de  $M$  e  $GK$  a curvatura de Gauss-Kronecker de  $\Gamma$ .

Pelo Teorema de Gauss-Bonnet [Chao6, Teorema V.2.6, p.243] [Peto6, Capítulo 4, seção 3, p.102] temos que

$$\int_{\Gamma} K_\Gamma d\sigma = 2\pi \mathcal{X}(\Gamma), \quad (157)$$

onde  $d\sigma$  é a forma volume de  $\Gamma$  e  $\mathcal{X}(\Gamma)$  é a característica de Euler-Poincaré de  $\Gamma$ .

Em nosso caso, como  $\Gamma$  é uma hipersuperfície convexa, isto é, a fronteira de um conjunto compacto e convexo com pontos interiores, temos que  $\mathcal{X}(\Gamma) = 2$ .

Sejam  $\kappa_1, \kappa_2$  as curvaturas principais de  $\Gamma$  com direções principais associadas  $E_1, E_2$ , respectivamente. Assim, como  $GK = \kappa_1 \kappa_2$ , temos pela Fórmula de Gauss para uma hipersuperfície [dC15, Observação 2.6, p. 145] que

$$K_\Gamma(E_1, E_2) = K_M(E_1, E_2) + GK. \quad (158)$$

Logo, de (157) e (158), temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (K_M + GK) d\sigma &= 4\pi \\ \int_{\Gamma} GK d\sigma &= 4\pi - \int_{\Gamma} K_M d\sigma. \end{aligned} \quad (159)$$

Assim, como  $K_M \leq 0$ , de (159) concluímos que

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \int_{\Gamma} GK d\sigma = 4\pi - \int_{\Gamma} K_M d\sigma \geq 4\pi = \text{vol}(\mathbb{S}^2).$$

Para provarmos o caso em que  $\Gamma$  é de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$ , aplicamos a técnica feita na demonstração do Teorema 3.69 que consiste em considerar  $\Gamma$  como conjunto de nível da função distância com sinal e na suavização desta função.

Agora obteremos a desigualdade para curvatura total em dimensão 2.

Sejam  $(M, g)$  uma variedade de Cartan-Hadamard 2-dimensional e  $\Gamma$  uma hipersuperfície convexa de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$  em  $M$ , isto é, uma subvariedade convexa de  $M$  de dimensão 1. Então queremos mostrar que

$$\mathcal{G}(\Gamma) \geq \text{vol}(\mathbb{S}^1), \quad (160)$$

onde  $\mathbb{S}^1$  denota o disco unitário de  $\mathbb{R}^2$  e  $\text{vol}$  denota seu volume.

Suponha, primeiramente, que  $\Gamma$  é suave e note que  $\text{vol}(\mathbb{S}^1) = 2\pi$ .

Considere  $K_\Gamma$  a curvatura de  $\Gamma$  e  $K_M$  a curvatura seccional de  $M$ .

Para o caso particular em que  $M = \mathbb{R}^2$  temos pelo Teorema de Fenchel [dC14, Teorema 3, p. 480] que

$$\int_\Gamma K_\Gamma ds \geq 2\pi.$$

Assim, por uma extensão do Teorema de Fenchel para variedades de Cartan-Hadamard [BcH74, Teorema 2, p. 185], temos que

$$\int_\Gamma K_\Gamma ds \geq 2\pi - \int_T K_M dA, \quad (161)$$

onde  $T$  é um tubo sobre  $\Gamma$  de raio suficientemente pequeno para não termos auto-intersecções. Assim, como  $K_M \leq 0$ , de (161) concluímos que

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \int_\Gamma K_\Gamma ds \geq 2\pi - \int_T K_M dA \geq 2\pi = \text{vol}(\mathbb{S}^1).$$

Para provarmos o caso em que  $\Gamma$  é de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$ , aplicamos a técnica feita na demonstração do Teorema 3.69 que consiste em considerar  $\Gamma$  como conjunto de nível da função distância com sinal e na suavização desta função.



# B I B L I O G R A F I A

[Alb15] P. Albano, *On the cut locus of closed sets*, Nonlinear Analysis **125** (2015). ↑[71](#)

[Ale78] S. Alexander, *Local and global convexity in complete riemannian manifolds*, Pacific Journal of Mathematics **76** (1978). ↑[126](#)

[Aub76] T. Aubin, *Problemes isoperimetriques et espaces de sobolev*, J. Differential Geometry **11** (1976). ↑[1](#)

[BcH74] F. Brickell and C. chih Hsiung, *The total absolute curvature of closed curves in riemannian manifolds*, Journal of Differential Geometry **9** (1974). ↑[143](#)

[Bero2] M. Berger, *A panoramic view of riemannian geometry*, 1st ed., Springer, Berlin, Germany, 2002. ↑[2](#)

[Bes78] A. L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, 1st ed., Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1978. ↑[50](#)

[BH99] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, 1st ed., Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1999. ↑[77](#), [131](#)

[BO69] R. L. Bishop and B. O'Neill, *Manifolds of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **145** (1969). ↑[126](#)

[Boro2] A. Borbély, *On the total curvature of convex hypersurfaces in hyperbolic spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002). ↑[116](#)

[BR33] E. F. Beckenbach and T. Radó, *Subharmonic functions and surfaces of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1933). ↑[2](#)

[BV88] Yu. D. Burago and V.A.Zalgaller, *Geometric inequalities*, 1st ed., Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1988. ↑[2](#)

[CG72] J. Cheeger and D. Gromoll, *On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature*, Annals of Mathematics **96** (1972). ↑[123](#), [125](#)

[Chao6] I. Chavel, *Riemannian geometry*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2006. ↑[142](#)

[Che89] S.-S. Chern, *Global differential geometry*, 1st ed., The Mathematical Association of America, Washington, D.C., United States of America, 1989. ↑[74](#), [119](#)

[Cro84] C. B. Croke, *A sharp four dimensional isoperimetric inequality*, Commentarii Mathematici Helvetici **59** (1984). ↑[2](#)

[CS04] P. Cannarsa and C. Sinestrari, *Semiconcave functions, hamilton-jacobi equations, and optimal control*, 1st ed., Birkhäuser, Basel, Switzerland, 2004. ↑[60](#), [124](#)

[CV81] B.-Y. Chen and L. Vanhecke, *Differential geometry of geodesic spheres*, Walter de Gruyter **1981** (1981). ↑[113](#)

[dC14] M. P. do Carmo, *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, 6th ed., Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil, 2014. ↑[143](#)

[dC15] ———, *Geometria riemanniana*, 5th ed., Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil, 2015. ↑[7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 42, 44, 45, 48, 49, 50, 142](#)

[FS06] W. H. Fleming and H. M. Soner, *Controlled markov processes and viscosity solutions*, 2nd ed., Springer, Berlin, Germany, 2006. ↑[126](#)

[GhW76] R. E. Greene and H. hsi Wu,  *$\mathcal{C}^\infty$  convex functions and manifolds of positive curvature*, Acta Mathematica **137** (1976). ↑[107](#)

[GMT83] E. Gonzalez, U. Massari, and I. Tamanini, *On the regularity of boundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint*, Indiana Univ. Math. J. **32** (1983). ↑[136](#)

[Gra00] A. Gray, *Tubes*, 2nd ed., Birkhäuser, Basel, Switzerland, 2000. ↑[84, 85, 127, 129, 140](#)

[Gra74] ———, *The volume of a small geodesic ball of a riemannian manifold*, Michigan Mathematical Journal **20** (1974). ↑[114](#)

[Gre63] L. W. Green, *Auf wiedersehensflächen*, Ann. of Math. **78** (1963). ↑[50](#)

[GS21] M. Ghomi and J. Spruck, *Total curvature and the isoperimetric inequality in cartan-hadamard manifolds*, 2021. ↑[vii, ix, 2, 3, 48](#)

[GT14] J. Ge and Z. Tang, *Geometry of isoparametric hypersurfaces in riemannian manifolds*, Asian Journal of Mathematics **18** (2014). ↑[84](#)

[How99] R. Howard, *Blaschke's rolling theorem for manifolds with boundary*, manuscripta mathematica **99** (1999). ↑[139](#)

[Hsi92] W.-Y. Hsiang, *On soap bubbles and isoperimetric regions in noncompact symmetric spaces, i*, Tohoku Mathematical Journal **44** (1992). ↑[137](#)

[Kat80] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, 1st ed., Springer, Berlin, Germany, 1980. ↑[127](#)

[Kle92] B. Kleiner, *An isoperimetric comparison theorem*, Inventiones mathematicae **108** (1992). ↑[2](#)

[Lee18] J. M. Lee, *Instroduction to riemannian manifolds*, 2nd ed., Springer International Publishing AG, Cham, Switzerland, 2018. ↑[24, 74](#)

[Lyt05] A. Lytchak, *Almost convex subsets*, Geometriae Dedicata **115** (2005). ↑[71](#)

[Mik01] G. Mikhail, *Metric structures for riemannian and non-riemannian spaces*, 1st ed., Birkhäuser, Basel, Switzerland, 2001. ↑[2](#)

[Mik81] ———, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, 1st ed., CEDIC F. Nathan, Paris, France, 1981. ↑[2](#)

[MM02] Mantegazza and Mennucci, *Hamilton—jacobi equations and distance functions on riemannian manifolds*, Applied Mathematics and Optimization **47** (2002). ↑[60](#)

[Moro03] F. Morgan, *Regularity of isoperimetric hypersurfaces in riemannian manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003). ↑[136](#)

[Peto06] P. Petersen, *Riemannian geometry*, 2nd ed., Springer, Berlin, Germany, 2006. ↑[142](#)

[Rit17] M. Ritoré, *Continuity of the isoperimetric profile of a complete riemannian manifold under sectional curvature conditions*, Rev. Mat. Iberoam. **33** (2017). ↑[137](#)

[RSN56] F. Riesz and B. SZ.-Nagy, *Functional analysis*, 2nd ed., Department of Mathematics, University of Michigan, Michigan, United States of America, 1956. ↑[137](#)

[Sak96] T. Sakai, *Riemannian geometry*, 1st ed., Translations of Mathematical Monographs, Rhode Island, United States of America, 1996. ↑[79](#)

[Sim83] L. Simon, *Lectures on geometric measure theory*, 1st ed., Centre for Mathematical Analysis, Canberra, Australia, 1983. ↑[136, 139](#)

[Str97] E. Stredulinsky, *Area minimizing sets subject to a volume constraint in a convex set*, The Journal of Geometric Analysis **7** (1997). ↑[136](#)

[Yan80] C. T. Yang, *Odd-dimensional wiedersehen manifolds are spheres*, Journal of Differential Geometry **15** (1980). ↑[50](#)